МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

Часть 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Издание третье, переработанное и дополненное

Рекомендовано
Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебника
для студентов экономических специальностей
высших учебных заведений

МОСКВА
“ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА”
2013

УДК 330.4(075.8)
ББК 65в6я73
М34

А В Т О Р Ы :

А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев,
А.В. Браилов, И.Г. Шандра

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Е.Г. Гольштейн,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий лабораторией ЦЭМИ РАН;

Э.М. Карташов,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей и прикладной математики
Московской государственной академии тонкой
химической технологии (МИТХТ) им. М.В. Ломоносова

М34 **Математика** в экономике: учебник. Ч. 1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2013. – 384 с.: ил.

ISBN 978-5-279-03488-8

Изложены темы: арифметические векторы и системы линейных уравнений, матрицы и определители,линейные экономические модели, элементы аналитической геометрии, метод наименьших квадратов выпуклые множества, линейное программирование, двойственность. В отличие от 2-го издания (2003 г.) добавлена глава «Комплексные числа», переработана глава о линейных преобразованиях и квадратичных формах, расширены главы, посвященные элементам аналитическолй геометрии и вопросам линейного программирования и др.

Для преподавателей и студентов экономических вузов, бизнес-школ, а также для всех, кто интересуется математическими приложениями в экономике.

УДК 330.4(075.8)
ББК 65в6я73

ISBN 978-5-279-03488-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

В любом из современных курсов экономики в той или иной степени используется математический аппарат: анализируются графики различных зависимостей, проводится математическая обработка статистических данных и т.д. Касаясь вопроса о сильных и слабых сторонах математических методов в экономике, отметим несколько моментов.

Первое – это то, что математика по самой ее сути не может оперировать с нечетко, а тем более некорректно определенными понятиями. Следовательно, если мы хотим использовать математические методы, то должны четко сформулировать задачу. Иначе говоря, применение математики с самого начала вызывает необходимость в уточнении понятий. Это, безусловно, ценное качество математических методов исследования.

Другой сильной стороной в применении математики является глубокая продвинутость математических теорий (ведь математика – одна из древнейших наук). Линейная алгебра, математический анализ, теория вероятностей, корреляционный и регрессионный анализ, дифференциальные уравнения, математическое программирование – эти и другие разделы математики предоставляют к услугам пользователей очень мощный и развитый математический аппарат.

Однако в случае применения математических методов при попытке формализовать экономическую ситуацию в полной общности может получиться очень сложная математическая задача. Тогда, чтобы ее упростить, вводят допущения, часто неоправданные с точки зрения экономистов. Поэтому пользователя подстерегает опасность заниматься математическими выкладками вместо анализа подлинной экономической ситуации. Главное и, по существу, единственное средство борьбы с этим – проверка опытными данными выводов математической теории.

Настоящая книга представляет собой третье издание части 1 учебника по курсу «Математика в экономике» в трех частях. Она охватывает вопросы линейной алгебры, аналитической геометрии, линейного программирования и их приложений к экономике. Некоторое предпочтение отдается тематике, связанной с финансами. В части 2 рассмотрены вопросы математического анализа. Часть 3 посвящена теории вероятностей и математической статистике. Следует отметить, что математический аппарат здесь используется только для анализа простейших экономических понятий и схем, а, поскольку учебник предназначен для студентов первого и второго курсов, то глубокие экономические проблемы в нем не обсуждаются.

Часть 1 третьего издания отличается от соответствующей части второго издания значительно большей полнотой изложения. Его основой по-прежнему являются арифметические векторы из пространства $\mathbf{R}^n$, но рассматриваются и абстрактные конечномерные векторные пространства.

Добавлена глава «Комплексные числа», в которой разбираются основные понятия алгебры комплексных чисел и многочленов с комплексными и действительными коэффициентами. Приведены доказательства теоремы об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел и теоремы о разложении рациональной функции на простейшие дроби. С учетом замечаний вновь написана глава о линейных преобразованиях и квадратичных формах. Изложены основные сведения о симметрических линейных преобразованиях и приведении квадратичных форм к каноническому виду.

Значительно расширена глава, посвященная элементам аналитической геометрии в пространстве $\mathbf{R}^n$ в частности, приведена классификация кривых и поверхностей второго порядка.

Существенной модернизации подверглись главы, посвященные вопросам линейного программирования. Главное отличие по сравнению с прежним изложением состоит в том, что добавлены вопросы, относящиеся к системам линейных неравенств (теоремы Фаркаша, Фаркаша – Минковского и т.п.). Это позволило коротко и в то же время прозрачно изложить основные теоремы линейного программирования. В третьем издании исправлены все замеченные неточности и опечатки.

ГЛАВА 1

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1.1. Системы линейных уравнений и их решение методом Гаусса

1. Основные понятия

Система m линейных уравнений с n неизвестными, или, как будем дальше говорить, система $m \times n$, записывается в общем виде так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для сокращения этой записи можно использовать *таблицу Гаусса* (табл. 1.1), которая содержит всю информацию о системе (1.1).

Таблица 1.1

x_1	x_2	...	x_n	
a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

Решением системы (1.1) является любой набор значений неизвестных

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n,$$

удовлетворяющий всем уравнениям системы. Система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной.*

Две системы уравнений с одними и теми же неизвестными $x_1, ..., x_n$ называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Забегая вперед, укажем, что для любой системы (1.1) возможны только три случая:

1) система не имеет ни одного решения;

2) система имеет единственное решение;

3) система имеет бесчисленное множество решений.

Множество всех решений системы (1.1) называется ее *общим решением.* Решить систему (1.1) означает найти ее общее решение.

Опишем некоторые действия над системой (1.1), называемые *элементарными преобразованиями.* Это:

1) перестановка уравнений;

2) вычеркивание из системы уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0,$$

или, проще, 0 = 0;

3) умножение обеих частей одного из уравнений системы на число $\lambda \neq 0$;

4) прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число.

Например, пусть дана система

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 4, \\ -2x_1 + 6x_2 = 0. \end{cases}$$

К обеим частям второго уравнения прибавим соответствующие части первого, умноженные на 2, и получим систему

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 4, \\ 8x_1 \qquad\quad = 8. \end{cases}$$

Предоставляем читателю проверить самостоятельно, что любое из элементарных преобразований, совершенное над системой уравнений, приводит к системе, равносильной исходной.

При выполнении элементарных преобразований над системой может возникнуть уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b,$$

где $b \neq 0$.

Ясно, что это уравнение не имеет решений; будем называть такое уравнение *противоречивым.* Система, содержащая противоречивое уравнение, несовместна; заниматься решением подобной системы не имеет смысла.

2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Для нахождения общего решения системы (1.1) имеется простой и удобный *метод Гаусса.* Суть метода заключается в том, что с помощью элементарных преобразований системы (1.1) либо получают систему, содержащую противоречивое уравнение (и тогда система (1.1) оказывается несовместной), либо система (1.1) приводится к некоторому специальному виду. Особенность этого вида заключается в том, что для каждого уравнения имеется неизвестное, которое входит в это уравнение с коэффициентом, равным единице, а в остальные уравнения – с коэффициентом 0. Если для каждого уравнения зафиксировано такое неизвестное, то это неизвестное называется *базисным*, а весь набор базисных неизвестных – *базисом неизвестных*. Остальные неизвестные (если они имеются) называются *свободными*.

Пример 1.1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + \boxed{x_2} - 5x_3 + x_6 = 7, \\ 3x_1 + 4x_3 + \boxed{x_5} - 3x_6 = -2, \\ x_1 - x_3 + \boxed{x_4} - 2x_6 = 8. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Здесь x_2, x_4, x_5 – базисные неизвестные, x_1, x_3, x_6 – свободные неизвестные. Заметим, что коэффициенты при базисных неизвестных в соответствующих уравнениях системы (1.2) равны 1. В общем случае это необязательно, но можно этого добиться с помощью элементарного преобразования типа 3), разделив уравнение на коэффициент при выбранной неизвестной.

Переписав систему (1.2) в виде

$$\begin{cases} x_2 = 7 - 2x_1 + 5x_3 - x_6, \\ x_5 = -2 - 3x_1 - 4x_3 + 3x_6, \\ x_4 = 8 - x_1 + x_3 + 2x_6 \end{cases} \tag{1.3}$$

(в левых частях системы стоят базисные, в правых частях – свободные неизвестные), получаем общее решение. Действительно, вместо свободных неизвестных x_1, x_3, x_6 можно подставить любые числа и затем найти значения базисных неизвестных x_2, x_4, x_5. Например, взяв $x_1 = 0,$ $x_3 = 1,$ $x_6 = 2,$ найдем $x_2 = 10,$ $x_4 = 13,$ $x_5 = 0,$ а значит, получим частное решение

$$x_1 = 0,\ x_2 = 10,\ x_3 = 1,\ x_4 = 13,\ x_5 = 0,\ x_6 = 2.$$

Таким образом, запись системы в виде (1.3) позволяет получить любое частное решение данной системы; в этом смысле запись (1.3) можно считать общим решением.

Очевидно, что *при наличии хотя бы одного свободного неизвестного система имеет бесчисленное множество решений*; *если свободных неизвестных нет* (*все неизвестные – базисные*), *то решение единственно.*

Изложим теперь алгоритм метода Гаусса, для чего дадим описание очередного k-го шага (k = 1, 2, ...).

Итак, очередной k-й шаг состоит из следующих действий:

1. Из системы, полученной ранее (после k – 1 предыдущих шагов), удаляем уравнения 0 = 0. Если в оставшейся системе имеется хотя бы одно противоречивое уравнение, то система несовместна, работа с ней прекращается.

2. Если противоречивых уравнений не оказалось, тогда одно из уравнений выбираем за *разрешающее уравнение* и одно из неизвестных – за *разрешающее неизвестное.* К такому выбору предъявляются следующие два требования:

- на предыдущих шагах это уравнение не было разрешающим;
- в разрешающем уравнении коэффициент при разрешающем неизвестном должен быть отличен от нуля; этот коэффициент называют *разрешающим элементом*.

3. Разделим разрешающее уравнение на разрешающий элемент, при этом коэффициент при разрешающем неизвестном станет равен единице.

4. Исключим разрешающее неизвестное из всех уравнений, кроме разрешающего. Для этого к каждому из таких уравнений прибавим разрешающее уравнение, умноженное на подходящее число.

Наши действия заканчиваются, если ни одно из уравнений уже нельзя выбрать за разрешающее (т.е. все уравнения перебывали в этой роли). В результате для каждого уравнения имеем свое базисное неизвестное, входящее в это уравнение с коэффициентом, равным единице, а в остальные уравнения – с коэффициентом 0. Таким образом, действия прекращаются после получения базиса неизвестных. Из полученной системы находим (как в указанном примере) общее решение.

Разберем несколько примеров.

Пример 1.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Решение. В табл. 1.2 отобразим один шаг исключения методом Гаусса для системы (1.4). Число 1, обведенное рамочкой, выберем в качестве разрешающего элемента. Чтобы исключить неизвестное x_1 из второго уравнения, умножим первую строку таблицы на –1 (число, обведенное в кружочек) и прибавим ко второй строке (указано стрелкой). Аналогично для исключения неизвестного x_1 из третьего уравнения умножим первую строку на –1 (второе число справа, обведенное в кружочек) и прибавим к третьей строке (указано стрелкой).

Таблица 1.2

x_1	x_2	x_3			
$\boxed{1}$	2	3	2	–1	–1
1	–1	–1	–2		
1	3	–1	–2		

В результате получим табл. 1.3, в которой разрешающим элементом выбрана единица в третьей строке и втором столбце, а дополнительными множителями являются 3 и –2. Далее приходим к табл. 1.4, в которой разделим элементы второй строки на общий множитель –16. Преобразования табл. 1.5 аналогичны выполненным действиям и не требуют дополнительных пояснений.

Таблица 1.3

1	2	3	2		
0	–3	–4	–4		
0	$\boxed{1}$	–4	–4	3	–2

Таблица 1.4

1	0	11	10
0	0	–16	–16
0	1	–4	–4

Таблица 1.5

1	0	11	10		
0	0	$\boxed{1}$	1	4	–11
0	1	–4	–4		

Таблица 1.6

1	0	0	–1
0	0	1	1
0	1	0	0

Табл. 1.6 соответствует система

$$\begin{cases} x_1 & & & = & -1, \\ & & x_3 & = & 1, \\ & x_2 & & = & 0. \end{cases}$$

Ответ: решение единственное: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Пример 1.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 + 8x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Как и в предыдущем примере, приведена последовательность таблиц Гаусса (табл. 1.7), отделенных одна от другой чертой, дающая другой результат.

Таблица 1.7

x_1	x_2	x_3	x_4				
$\boxed{1}$	–3	2	2	1	–3	–2	–2
3	–8	8	7	3			
2	–4	8	8	0			
2	–3	10	8	1			
1	–3	2	2	1			
0	$\boxed{1}$	2	1	0	3	–2	–3
0	2	4	4	–2			
0	3	6	4	–1			
1	0	8	5	1			
0	1	2	1	0			
0	0	0	2	–2			
0	0	0	$\boxed{1}$	–1	–2	–1	–5
1	0	8	0	6			
0	1	2	0	1			
0	0	0	0	0			
0	0	0	1	–1			

Последней таблице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + 8x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

с базисными неизвестными x_1, x_2, x_4 и свободным неизвестным x_3. Общее решение дается формулами

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 6 - 8x_3, \\ x_2 = \ \ 1 - 2x_3, \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

Ответ: система имеет бесчисленное множество решений.

Пример 1.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 14x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Предоставляем читателю убедиться, что после двух шагов с разрешающими элементами a_{11} и a_{22} получится система, в которой третье уравнение будет противоречивым.

Ответ: система несовместна.

3. Однородные системы линейных уравнений

Определение. *Линейное уравнение называется* ***однородным****, если свободный член уравнения равен нулю. Система, состоящая из однородных уравнений, сама называется* ***однородной****.*

Общий вид однородной системы m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Однородная система всегда совместна: одно из ее решений есть

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots,\ x_n = 0.$$

Это решение называется *нулевым*.

Особую важность представляет вопрос, имеет ли данная однородная система ненулевые решения? Частичный ответ дает следующая теорема.

Теорема 1.1. *Однородная система, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, всегда имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Применим к системе (1.5) метод Гаусса. В процессе преобразований не могут появиться противоречивые уравнения

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b,$$

где $b \neq 0$, поскольку все свободные члены уравнений – нули.

Значит, после некоторого числа шагов получим систему, где каждому уравнению будет соответствовать свое базисное неизвестное. Поскольку число уравнений меньше числа n неизвестных, то и число базисных неизвестных должно быть меньше n. Следовательно, обязательно имеются свободные неизвестные. Система имеет бесчисленное множество решений, в том числе – ненулевые решения.

§ 1.2. Линейные пространства

1. Арифметические векторы и действия над ними. Пространство $\mathbb{R}^n$

Напомним некоторые сведения из школьного курса геометрии.

Если на плоскости ввести прямоугольную систему координат, то каждому вектору $\vec{a}$ (направленному отрезку) будет соответствовать пара чисел a_1, a_2 – координат этого вектора. Мы записываем это с помощью равенства

$$\vec{a} = (a_1, a_2).$$

Аналогично в трехмерном пространстве

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Обобщая эти факты, примем следующее определение, в котором n означает любое натуральное число.

Определение. ***Арифметическим n-мерным вектором*** *называется любая последовательность из n действительных чисел*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Для сокращенного обозначения арифметического вектора обычно пишется одна буква со стрелкой сверху:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, задающие вектор $\vec{a}$, называются *координатами* этого вектора. Например, выражение

$$\vec{a} = (-2, 4, 1, 1, 0)$$

является арифметическим вектором с координатами $-2, 4, 1, 1, 0$.

Разумеется, непосредственный геометрический смысл имеют только одномерные, двумерные и трехмерные арифметические векторы. Первые изображаются направленными отрезками на числовой прямой, вторые – на координатной плоскости, третьи – в координатном пространстве.

В дальнейшем слово «арифметический» в названии вектора будем, как правило, опускать.

Определение. *Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с одним и тем же числом координат*

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

будем считать ***равными*** *в том и только в том случае, когда* $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

Равенство векторов обозначается обычным образом: $\vec{a} = \vec{b}$.

Определение. ***Суммой*** *двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (с одинаковым числом n координат) называется вектор*

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Легко проверяются следующие свойства сложения векторов:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Вектор (0, 0, ..., 0) называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$ (или просто **0**). Очевидно, что

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого $\vec{a}$.

Наконец, вектор $\left(-a_1,-a_2,\ldots,-a_n\right)$ называется *противоположным вектору* $\vec{a}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ и обозначается $-\vec{a}$.

4. $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

Определение. ***Произведением вектора*** $\vec{a}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ ***на число*** λ *называется вектор*

$$\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots,\lambda a_n\right).$$

Проверьте следующие свойства операции умножения вектора на число:

5. $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;
6. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
7. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;
8. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Определение. *Множество всех n-мерных арифметических векторов, в котором введены указанные выше операции сложения векторов и умножения вектора на число, называется* ***арифметическим n-мерным векторным пространством*** *и обозначается* $\mathbb{R}^n$.

Снова подчеркнем, что непосредственный геометрический смысл имеют лишь пространства $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Пространство $\mathbb{R}^n$ при $n > 3$ – чисто математический объект. Как мы увидим далее, этот объект очень удобен для описания реальных процессов, в том числе экономических. Заметим также, что кроме пространства $\mathbb{R}^n$ существуют и другие математические объекты, на которых могут быть введены операции сложения и умножения на число. Эти объекты и будут служить предметом нашего дальнейшего рассмотрения.

2. Линейные пространства общего вида

Определение. *Множество V называется* ***линейным пространством****, а его элементы –* ***векторами****, если на нем определены две операции*:

- ***сложение векторов****, означающее, что каждым двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по некоторому правилу ставится в соответствие третий вектор, называемый* ***суммой векторов*** *$\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначаемый $\vec{a}+\vec{b}$*;
- ***умножение вектора на число****, означающее, что каждой паре, состоящей из вектора $\vec{a}$ и числа λ, ставится в соответствие вектор, называемый* ***произведением*** *λ на $\vec{a}$ и обозначаемый $\lambda\vec{a}$.*

При этом требуется, чтобы указанные операции удовлетворяли следующим условиям – аксиомам:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$;
3) существует *нулевой элемент* $\vec{0}$, такой, что
   $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого $\vec{a}$;
4) для каждого элемента $\vec{a}$ существует *противоположный элемент* $-\vec{a}$, такой, что $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$;
5) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;
6) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
7) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;
8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$,

где $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – произвольные элементы линейного пространства V, а λ и μ – произвольные действительные числа, которые принято называть ***скалярами***.

Линейные пространства также часто называют *векторными пространствами*.

Приведем примеры линейных пространств:

1) пространство $\mathbb{R}^n$;

2) множество решений однородной системы линейных уравнений;

3) множество функций, определенных на отрезке $[a;\ b]$, с заданными для них обычным образом операциями сложения и умножения на число;

4) множество положительных чисел, если операцию сложения двух элементов x и y определить как их произведение (понимаемое в обычном смысле), а операцию умножения x на действительное число k – как возведение x в степень k;

5) множество всех многочленов с заданными для них стандартным образом операциями сложения и умножения на число;

6) множество всех многочленов, степень которых не превышает n.

Предоставляем читателю возможность самостоятельно проверить выполнение аксиом линейного пространства для рассмотренных выше примеров.

Предложение 1. *Нулевой элемент линейного пространства определен единственным образом.*

Действительно, предположим противное, что существуют два нулевых элемента $\vec{0}_1$ и $\vec{0}_2$. Тогда, с одной стороны, на основании аксиомы 3 $\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_1$, так как $\vec{0}_2$ – нулевой элемент.

С другой стороны, $\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2$, так как $\vec{0}_1$ – нулевой элемент. Следовательно, $\vec{0}_1 = \vec{0}_2$, что и требовалось.

Предложение 2. *При умножении на нуль любой вектор* $\vec{a}$ *обращается в нулевой вектор, т.е.*

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}. \tag{1.6}$$

В самом деле,

$$\vec{a} = (0+1)\vec{a} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{a} = 0 \cdot \vec{a} + \vec{a}.$$

Прибавляя $-\vec{a}$ к обеим частям равенства, получим (1.6).

Предложение 3. *Для любого элемента* $\vec{a}$ *существует единственный противоположный элемент* $-\vec{a}$, *причем*

$$-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}. \tag{1.7}$$

Действительно, предположим, что для элемента $\vec{a}$ существуют два противоположных элемента $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Тогда, принимая во внимание аксиомы 1 и 4, имеем

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_1 + \vec{0} = \vec{a}_1 + \left(\vec{a} + \vec{a}_2\right) = \left(\vec{a}_1 + \vec{a}\right) + \vec{a}_2 = \vec{0} + \vec{a}_2 = \vec{a}_2.$$

Из равенства (1.6) с учетом аксиом 6 и 8 получим

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{a} = (-1+1) \cdot \vec{a} = (-1) \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{a} = (-1) \cdot \vec{a} + \vec{a}.$$

Отсюда в силу единственности противоположного элемента вытекает равенство (1.7).

Аналогичным образом могут быть доказаны следующие свойства операций над векторами:

1) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$,

2) $(-\lambda) \cdot \vec{a} = -(\lambda \vec{a})$.

Рекомендуем читателю провести эти доказательства самостоятельно.

3. Подпространство линейного пространства

Определение. *Подмножество S линейного пространства V называется* ***подпространством,*** *если выполнены следующие два условия*:

1) *для любых двух векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *из S их сумма* $\vec{a} + \vec{b}$ *также принадлежит S*;

2) *для любого вектора* $\vec{a}$ *из S и любого действительного числа* λ *произведение* $\lambda\vec{a}$ *также принадлежит S*.

Очевидно, что подпространство *S* само является линейным пространством относительно операций сложения и умножения на число, определенных в пространстве *V* (т.е. в подпространстве *S* выполнены все восемь аксиом линейного пространства). В частности, нулевой элемент принадлежит подпространству, поскольку $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$, где $\vec{a}$ – произвольный элемент *S*.

Отметим, что у любого линейного пространства существуют два подпространства, называемых *тривиальными*: это само линейное пространство *V* и *нулевое подпространство* (состоящее из одного нулевого элемента).

Рассмотрим примеры.

1. Множество всех многочленов, заданных на отрезке $[a; b]$, является подпространством линейного пространства функций, заданных на том же отрезке.

2. Множество всех многочленов, степень которых не превышает $n-1$, является подпространством множества многочленов, степень которых не превышает n.

3. Множество решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными является подпространством пространства $\mathbb{R}^n$.

Предложение 4. *Пересечение S двух подпространств S_1 и S_2 линейного пространства V является подпространством.*

Действительно, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принадлежат S, то они принадлежат одновременно S_1 и S_2, а значит, $\vec{a}+\vec{b}$ и $\lambda\vec{a}$ (где λ – любое число) также будут принадлежать одновременно S_1 и S_2, т.е. будут принадлежать S.

Заметим также, что объединение двух подпространств в отличие от пересечения в общем случае не является подпространством.

§ 1.3. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

1. Системы векторов в линейном пространстве

Операции сложения векторов и умножения вектора на число лежат в основе обширного и богатого приложениями раздела математики, называемого линейной алгеброй. Одним из центральных понятий линейной алгебры является понятие линейной зависимости.

Сначала заметим следующее: если при рассмотрении некоторого вопроса приходится иметь дело с несколькими векторами, то, как правило, их обозначают одной и той же буквой $\vec{a}$ с разными индексами: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots$; весь набор $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\}$ называют *системой векторов*.

Замечание 1. Система векторов отличается от множества векторов тем, что в системе все векторы перенумерованы и среди них могут быть совпадающие.

Определение. *Пусть даны векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$. *Любой вектор* $\vec{a}$ *вида*

$$\vec{a} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + ... + k_s\vec{a}_s, \tag{1.8}$$

где $k_1, k_2, ..., k_s$ *– какие угодно числа, называется* ***линейной комбинацией*** *векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$.

При наличии равенства (1.8) также говорят, что вектор $\vec{a}$ *линейно выражается* через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ или что $\vec{a}$ *разлагается* по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$.

Например, для системы векторов из $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a}_1 = (2, 2, 3), \vec{a}_2 = (0, -4, 5), \vec{a}_3 = (3, 13, -8)$$

рассмотрим линейную комбинацию

$$3\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 = (6, 6, 9) - (0, -20, 25) - (6, 26, -16) = (0, 0, 0).$$

Таким образом, вектор $(0, 0, 0)$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Определение. *Множество всех линейных комбинаций векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ *называется* ***линейной оболочкой*** *векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ *и обозначается* $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s)$.

Линейная оболочка $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s)$, как нетрудно видеть, является подпространством линейного пространства V. Причем в некотором смысле она является наименьшим подпространством, содержащим векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$. Это означает, что любое другое подпространство, содержащее векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$, содержит и их линейную оболочку.

2. Линейная зависимость векторов и ее свойства

Определение. *Система векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ *линейного пространства V называется* ***линейно зависимой***, *если существуют такие числа* $c_1, c_2, ..., c_s$, *не равные одновременно нулю, что справедливо равенство*

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + ... + c_s\vec{a}_s = 0. \qquad (1.9)$$

В частности, система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ из предыдущего примера (с. 24) линейно зависима.

Определение. *Если система векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ *такова, что равенство* (1.9) *возможно, только если* $c_1 = c_2 = ... = c_s = 0$, *то эта система называется* ***линейно независимой***.

Замечание 2. Понятие линейной независимости может быть обобщено и на системы, состоящие из бесконечного числа векторов. Бесконечную систему называют *линейно независимой,* если линейно независима ее любая конечная подсистема.

Перечислим ряд свойств линейной зависимости.

1. *Система из одного вектора* $\vec{a}$ *линейно зависима тогда и только тогда, когда* $\vec{a} = \vec{0}$.

Доказательство. Пусть система $\{\vec{a}\}$, состоящая из одного вектора $\vec{a}$, линейно зависима. Тогда найдется число $c \neq 0$, такое, что $c\vec{a} = \vec{0}$. Умножим обе части этого равенства (оба вектора) на число c^{-1}. Получим $c^{-1}(c\vec{a}) = c^{-1} \cdot \vec{0}$ или $(c^{-1}c)\vec{a} = \vec{0}$. Таким образом, $1 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{a} = \vec{0}$.

Обратно, если вектор $\vec{a}$ равен $\vec{0}$, то равенство $1 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ показывает, что система $\{\vec{a}\}$ линейно зависима.

2. *Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима в том и только в том случае, когда среди данных векторов имеется такой, который линейно выражается через остальные.*

Доказательство. Пусть среди данных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ имеется такой, например, вектор $\vec{a}_1$, который линейно выражается через остальные:

$$\vec{a}_1 = k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_s\vec{a}_s.$$

Прибавляя к обеим частям равенства вектор $-\vec{a}_1$, получим

$$-\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_s\vec{a}_s = \vec{0},$$

т.е. линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ равна нулю, причем имеются коэффициенты, не равные нулю (коэффициент при $\vec{a}_1$ равен –1). Следовательно, система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ линейно зависима.

Обратно, пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ линейно зависимы, т.е. имеет место равенство (1.9) с коэффициентами $c_1, c_2, ..., c_s$, не равными нулю одновременно. Пусть, скажем, $c_1 \neq 0$. Перепишем равенство (1.9) в виде

$$-c_1\vec{a}_1 = c_2\vec{a}_2 + ... + c_s\vec{a}_s$$

и, умножив обе части на $-c_1^{-1}$, получим равенство

$$\vec{a}_1 = -\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\vec{a}_2 - \ldots - \left(\frac{c_s}{c_1}\right)\vec{a}_s,$$

означающее, что вектор $\vec{a}_1$ линейно выражается через остальные векторы системы.

3. *Если часть системы линейно зависима, то и вся система линейно зависима.*

Следствие. *Система, включающая нулевой вектор, линейно зависима.*

Доказательство. Пусть дана система, например, из трех векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3,$ причем часть системы, состоящая из двух векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2,$ линейно зависима, т.е. справедливо равенство

$$c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0},$$

где один из коэффициентов c_2 или c_3 отличен от нуля. Добавив к обеим частям вектор $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}_1,$ получим равенство

$$0 \cdot \vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0},$$

означающее линейную зависимость всей системы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3.$

4. *Если система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ линейно независима, но при добавлении к ней еще одного вектора $\vec{a}$ становится линейно зависимой, то вектор $\vec{a}$ линейно выражается через $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s.$*

Доказательство. По условию справедливо равенство вида

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + ... + c_s\vec{a}_s + c\vec{a} = \vec{0}, \qquad (1.10)$$

где не все числа $c_1, c_2, ..., c_s, c$ равны нулю. Нетрудно видеть, что именно $c \neq 0;$ в противном случае мы получили бы равенство $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + ... + c_s\vec{a}_s = \vec{0},$ означающее линейную зависимость системы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s.$ Пользуясь тем, что $c \neq 0,$ можно из равенства (1.10) выразить $\vec{a}$ через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s.$

3. Линейно зависимые и линейно независимые системы в пространстве $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ систему векторов вида

$$\begin{array}{lcllllll} \vec{a} & = & (\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots, & \alpha_n), \\ \vec{b} & = & (0, & \beta_2, & \beta_3, & \ldots, & \beta_n), \\ \vec{c} & = & (0, & 0, & \gamma_3, & \ldots, & \gamma_n), \\ & & . & . & . & . & ., \end{array}$$

где α_i, β_j, ... обозначают какие-то числа, причем α_1, β_2, γ_3, ... (числа, стоящие на «диагонали») отличны от нуля. Такая система векторов называется *лестничной*. Понятно, что число векторов в лестничной системе не превосходит n (числа координат в каждом векторе).

Предложение. *Любая лестничная система векторов линейно независима.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда один из данных векторов должен линейно выражаться через остальные. Пусть, например, $\vec{a}$ линейно выражается через $\vec{b}, \vec{c}, \ldots$:

$$\vec{a} = k\vec{b} + l\vec{c} + \ldots .$$

Но такое равенство невозможно, поскольку первая координата вектора $\vec{a}$ отлична от нуля, а первая координата вектора $k\vec{b} + l\vec{c} + \ldots$ равна нулю. Полученное противоречие доказывает, что система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ линейно независима.

Определение. *Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются* ***коллинеарными****, если $\vec{a} = k\vec{b}$ или $\vec{b} = k\vec{a}$ для некоторого числа k.*

Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ равен нулю, то такие векторы заведомо коллинеарны: если, например, $\vec{a} = \vec{0}$, то имеем $\vec{a} = 0 \cdot \vec{b}$.

В случае векторов из пространства $\mathbb{R}^n$ распознать коллинеарность совсем просто: координаты a_1, ..., a_n вектора $\vec{a}$ должны быть *пропорциональны* координатам b_1, ..., b_n вектора $\vec{b}$.

Пример коллинеарных векторов дает любая *таблица обменных курсов* валют. Например, на сайте FOREX (электронный адрес в Интернет – http://www.forexpros.ru/quotes/) имеется таблица кросс-курсов валют, условный фрагмент которой приводится ниже (табл. 1.8).

Таблица 1.8

Кросс-курс	USD	EUR	GBP	CHF
USD	**1**	0.8121	0.6793	1.1515
EUR	1.2307	**1**	0.8363	1.4171
GBP	1.4716	1.1956	**1**	1.6947
CHF	0.8685	0.7055	0.5901	**1**

Каждая строка табл. 1.8 выражает курсовую стоимость единицы соответствующего вида валюты. Так, вторая строка показывает, что за один евро можно получить 1 доллар 23 цента, 84 пенса или 1 франк 42 сантима. Любые два столбца и любые две строки этой таблицы пропорциональны, т.е. любые векторы-столбцы и любые векторы-строки коллинеарны, причем в этой же таблице легко найти коэффициент пропорциональности.

В общем случае вопрос о линейной зависимости системы векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ из пространства $\mathbb{R}^n$ можно разрешить с помощью метода Гаусса. Данная система будет линейно зависимой, если уравнение

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_m\vec{a}_m = 0 \qquad (1.11)$$

имеет ненулевые решения. Запишем координаты векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ по столбцам:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \ldots \\ a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (1.11) в координатной записи равносильно системе n линейных уравнений с m неизвестными

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0.
\end{cases} \tag{1.12}
$$

Если окажется, что решение системы единственное (т.е. нулевое), то система $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,..., $\vec{a}_m$ линейно независима; в противном случае эта система линейно зависима. Рассмотрим пример на исследование линейной зависимости векторов.

Пример 1.5. Дана система из четырех векторов в $\mathbb{R}^5$:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= (-1;\ 3;\ 3;\ 2;\ 5), \\
\vec{a}_2 &= (-3;\ 5;\ 2;\ 3;\ 4), \\
\vec{a}_3 &= (-3;\ 1;\ -5;\ 0;\ -7), \\
\vec{a}_4 &= (-5;\ 7;\ 1;\ 4;\ 1).
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

Выяснить, является ли эта система линейно зависимой.

Решение. Запишем уравнение

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4 = \vec{0}.$$

Приравнивая координаты векторов слева и справа, получим следующую однородную систему пяти уравнений с четырьмя неизвестными

$$
\begin{cases}
-x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0, \\
3x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\
3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0, \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0, \\
5x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 = 0.
\end{cases} \tag{1.14}
$$

Если эта система имеет только нулевое решение, то система векторов (1.13) линейно независима. Если же имеются и ненулевые решения, то система (1.13) линейно зависима.

Применим к системе уравнений (1.14) метод Гаусса (таблицы Гаусса в табл. 1.9, соответствующие каждому шагу исключения неизвестных, отделены друг от друга чертой, разрешающие элементы помещены в рамку).

Таблица 1.9

x_1	x_2	x_3	x_4	
$\boxed{-1}$	–3	–3	–5	0
3	5	1	7	0
3	2	–5	1	0
2	3	0	4	0
5	4	–7	1	0
1	3	3	5	0
0	$\boxed{-4}$	–8	–8	0
0	–7	–14	–14	0
0	–3	–6	–6	0
0	–11	–22	–24	0
1	3	3	5	0
0	$\boxed{1}$	2	2	0
0	1	2	2	0
0	1	2	2	0
0	–11	–22	–24	0
1	0	–3	–1	0
0	1	2	2	0
0	0	0	–2	0
1	0	–3	–1	0
0	1	2	2	0
0	0	0	$\boxed{1}$	0
1	0	–3	0	0
0	1	2	0	0
0	0	0	1	0

Процесс преобразований закончен. Система уравнений, отвечающая последнему фрагменту таблицы, имеет базисные неизвестные x_1, x_2, x_4 и свободную неизвестную x_3. Наличие свободной неизвестной означает, что решений бесчисленное множество. Следовательно, система векторов (1.13) линейно зависима.

4. Линейно зависимые и линейно независимые системы в пространстве $\mathbb{R}^3$

Чтобы лучше "прочувствовать" смысл понятия линейной зависимости, обратимся к векторам из пространства $\mathbb{R}^3$.

1. Пусть дана система из двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если система линейно зависима, то один из векторов, допустим $\vec{a}$, линейно выражается через другой:

$$\vec{a} = k\vec{b}.$$

Два вектора, связанные такой зависимостью, как уже говорилось, называются *коллинеарными.* Итак, *система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.* Заметим, что такое заключение относится не только к $\mathbb{R}^3$, но и к любому линейному пространству.

2. Пусть система в $\mathbb{R}^3$ состоит из трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Линейная зависимость означает, что один из векторов, скажем $\vec{a}$, линейно выражается через остальные:

$$\vec{a} = k\vec{b} + l\vec{c}. \tag{1.15}$$

Если считать, что все векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеют общее начало, то из (1.15) следует, что все три вектора лежат в одной плоскости.

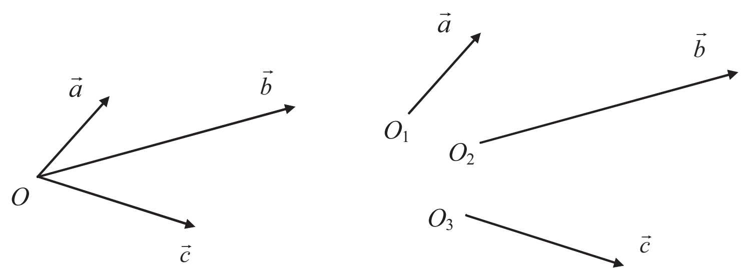

Рис. 1.1

Определение. *Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в $\mathbb{R}^3$, лежащие в одной плоскости или параллельные одной плоскости, называются* ***компланарными*** (на рис. 1.1 слева указаны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ из одной плоскости, а справа те же векторы отложены от разных начал O_1, O_2, O_3 и лишь параллельны одной плоскости).

Итак, если три вектора в $\mathbb{R}^3$ линейно зависимы, то они компланарны. Справедливо и обратное: если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ из $\mathbb{R}^3$ компланарны, то они линейно зависимы. Доказательство предоставим читателю провести самостоятельно.

§ 1.4. Базис и размерность линейного пространства

1. Базис линейного пространства

Определение. *Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ называется* ***базисом*** *линейного пространства V, если выполнены следующие условия*:

1) *эти векторы линейно независимы*;

2) *любой вектор $\vec{a}$ из простроанства V является линейной комбинацией векторов данной системы, т.е.*

$$\vec{a} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + ... + k_s\vec{a}_s. \tag{1.16}$$

При этом равенство (1.16) *называется* ***разложением вектора*** $\vec{a}$ *по данному базису*, *а коэффициенты $k_1, k_2, ..., k_s$ –* ***координатами вектора*** $\vec{a}$ *в данном базисе*.

Другими словами, линейно независимые векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ образуют базис пространства *V*, если линейная оболочка $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s)$ совпадает с *V*.

Примеры. 1. В пространстве $\mathbb{R}^n$ в качестве базиса может быть выбрана система из *n единичных векторов*

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$
$$\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0),$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Действительно, векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ образуют лестничную систему и потому линейно независимы; далее, если $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$, то очевидное равенство

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n$$

показывает, что вектор $\vec{a}$ есть линейная комбинация $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

2. В пространстве многочленов степени, не превышающей n, в качестве базиса можно выбрать степени переменной x: 1, x, x^2, …, x^n. Эта система линейно независима, так как в противном случае существовал бы многочлен с ненулевыми коэффициентами, тождественно равный нулю. С другой стороны, очевидно, что любой многочлен степени n разлагается по степеням x.

Предложение. *Координаты вектора в данном базисе определены однозначно.*

Доказательство. Действительно, если бы существовали два разложения вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$:

$$\vec{a} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + ... + k_s\vec{a}_s,$$
$$\vec{a} = l_1\vec{a}_1 + l_2\vec{a}_2 + ... + l_s\vec{a}_s,$$

то, вычитая из первого равенства второе, получили бы

$$(k_1 - l_1)\vec{a}_1 + (k_2 - l_2)\vec{a}_2 + ... + (k_s - l_s)\vec{a}_s = \vec{0}.$$

Поскольку векторы базиса $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ линейно независимы, то

$$k_1 - l_1 = 0; \;\; k_2 - l_2 = 0; \;\; ..., \;\; k_s - l_s = 0.$$

Замечание. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ следующие разложения:

$$\vec{a} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + ... + k_s\vec{a}_s,$$

$$\vec{b} = l_1\vec{a}_1 + l_2\vec{a}_2 + \ldots + l_s\vec{a}_s.$$

Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = (k_1 + l_1)\vec{a}_1 + (k_2 + l_2)\vec{a}_2 + \ldots + (k_s + l_s)\vec{a}_s.$$

Таким образом, при сложении двух векторов в данном базисе соответствующие координаты складываются. Аналогично при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Мы видим, что задание базиса, состоящего из s векторов, в линейном пространстве V позволяет моделировать это пространство при помощи пространства $\mathbb{R}^s$. Действительно, существует взаимно-однозначное соответствие между векторами и наборами их координат в базисе (элементами пространства $\mathbb{R}^s$). При этом операциям над векторами, определенными в V, соответствуют аналогичные операции над их координатами в пространстве $\mathbb{R}^s$.

К данному моменту нам неизвестно, возможна ли такая ситуация, когда различные базисы в линейном пространстве V состоят из разного числа векторов. Чтобы убедиться, что такая ситуация невозможна, докажем лемму.

Лемма. *Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ – базис в линейном пространстве V и $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_t$ – линейно независимая система векторов. Тогда $t \le s$.*

Доказательство. Предположим противоположное: $t > s$ и докажем, что тогда система векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_t$ будет линейно зависима, т.е. имеется нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю:

$$x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \ldots + x_t\vec{b}_t = \vec{0}. \quad (1.17)$$

Запишем разложение векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_t$ в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$:

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = c_{11}\vec{a}_1 + c_{21}\vec{a}_2 + \ldots + c_{s1}\vec{a}_s, \\ \vec{b}_2 = c_{12}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2 + \ldots + c_{s2}\vec{a}_s, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{b}_t = c_{1t}\vec{a}_1 + c_{2t}\vec{a}_2 + \ldots + c_{st}\vec{a}_s. \end{cases} \tag{1.18}$$

Координатами вектора $x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \ldots + x_t\vec{b}_t$ являются числа $c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1t}x_t, c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2t}x_t, \ldots, c_{s1}x_1 + c_{s2}x_2 + \ldots + c_{st}x_t$. Поскольку векторы базиса линейно независимы, из (1.17) получим систему однородных уравнений

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1t}x_t = 0, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2t}x_t = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{s1}x_1 + c_{s2}x_2 + \ldots + c_{st}x_t = 0. \end{cases}$$

В этой системе число неизвестных t больше числа уравнений s, так что согласно теореме 1.1 она имеет ненулевые решения, что доказывает лемму.

Мы видим, что число векторов любой линейно независимой системы достигает максимума в случае базиса.

Теорема 1.2. *Число векторов базиса линейного пространства V определено однозначно.*

Доказательство. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ и $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_t$ – два базиса пространства V. Поскольку $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_t$ – линейно независимая система векторов, по лемме $t \le s$. Аналогично, поскольку $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_t$ – базис, а векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ линейно независимы, $s \le t$. Поэтому $s = t$, что и требовалось доказать.

Определение. ***Размерностью*** *линейного пространства V называется число s векторов его базиса.*

Линейное пространство, имеющее размерность n, называют *n-мерным*. Размерность линейного пространства V обозначают $\dim V$ (от английского слова dimension). В частности, размерность арифметического линейного пространства $\mathbb{R}^n$ равна n ($\dim \mathbb{R}^n = n$), что оправдывает используемое обозначение. Непосредственным следствием данных определений служит теорема.

Теорема 1.3. *В n-мерном пространстве V любая система из s векторов, где $s > n$, линейно зависима.*

Все линейные пространства, имеющие ту или иную размерность, называют *конечномерными*.

Докажем в заключение такую теорему.

Теорема 1.4. *Линейно независимая система векторов в n-мерном линейном пространстве V является базисом тогда и только тогда, когда число этих векторов равно n.*

Доказательство. Пусть $\dim V = n$ и $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ – линейно независимая система векторов в пространстве V. Докажем, что любой вектор $\vec{b}$ из V разлагается по данной системе. Для этого присоединим вектор $\vec{b}$ к системе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, получим систему из $n + 1$ вектора, которая будет линейно зависимой по теореме 1.3. Теперь наше утверждение следует из свойства 4 линейной зависимости векторов (см. § 1.3), доказательство которого дословно переносится на случай любого линейного пространства.

Пример 1.6. Система векторов

$$\begin{array}{lcrrrl} \vec{p}_1 & = & (7, & 3, & -2), \\ \vec{p}_2 & = & (0, & 2, & 1), \\ \vec{p}_3 & = & (0, & 0, & 4) \end{array}$$

является базисом в $\mathbb{R}^3$. Действительно, векторы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ образуют лестничную систему и потому линейно независимы; поскольку их число равно 3, эти векторы образуют базис.

Пример 1.7. Векторы

$$\begin{array}{lcrrrrl} \vec{p}_1 & = & (0, & 0, & 0, & 1), \\ \vec{p}_2 & = & (7, & 1, & 3, & 2), \\ \vec{p}_3 & = & (0, & 0, & -2, & 6), \\ \vec{p}_4 & = & (0, & -1, & 2, & 0) \end{array}$$

образуют базис в $\mathbb{R}^4$. Действительно, расположив эти векторы в другой последовательности, а именно:

$$\vec{p}_2, \vec{p}_4, \vec{p}_3, \vec{p}_1,$$

получим лестничную систему векторов в $\mathbb{R}^4$, следовательно, эта система – базис.

Из леммы следует, что *любое подпространство S конечномерного линейного пространства V конечномерно*. Размерность подпространства S меньше размерности V, если S отлично от V.

Действительно, если бы их размерности совпадали, то базис подпространства S являлся бы базисом пространства V. А, следовательно, совпадали бы пространства S и V.

2. Ранг и базис системы векторов

Ранее (с. 24) уже отмечалось, что линейная оболочка $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s)$ векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ пространства V является подпространством. Размерность этого подпространства называется *рангом системы векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ и обозначается $\mathrm{rk}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s)$. Таким образом, ранг системы равен r, если среди векторов системы существуют r линейно независимых, а любые $q > r$ векторов данной системы линейно зависимы. Ранг же линейно независимой системы равен числу ее членов.

Подсистема $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_r$ системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ называется *базисом этой системы*, если она является базисом линейной оболочки $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s)$.

Пример 1.8. Дана система из четырех векторов в пространстве $\mathbb{R}^5$:

$$\vec{a}_1 = (-1; 3; 3; 2; 5),\ \ \vec{a}_2 = (-3; 5; 2; 3; 4),$$
$$\vec{a}_3 = (-3; 1; -5; 0; -7),\ \ \vec{a}_4 = (-5; 7; 1; 4; 1). \qquad (1.19)$$

Найти ранг и базис этой системы.

Р е ш е н и е. Данная система векторов рассматривалась в примере 1.5, где выяснялся вопрос о ее линейной зависимости. С этой целью мы исследовали систему уравнений

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \tag{1.20}$$

представляющую собой координатную форму записи уравнения

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4 = \vec{0}. \tag{1.21}$$

В результате решения системы (1.20) методом Гаусса получена следующая итоговая таблица (табл. 1.10).

Таблица 1.10

1	0	–3	0	0
0	1	2	0	0
0	0	0	1	0

Поэтому общее решение этой системы будет

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3, \\ x_2 = -2x_3, \\ x_4 = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Наличие свободной неизвестной x_3 в общем решении указывает на то, что данная система линейно зависима.

Исследуем теперь на линейную зависимость векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$, соответствующие базисным переменным x_1, x_2, x_4. Для этого рассмотрим уравнение

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_4\vec{a}_4 = \vec{0}. \tag{1.23}$$

Так как уравнение (1.23) получается из уравнения (1.21) в предположении $x_3 = 0$, то и общее решение уравнения (1.23) может быть получено из общего решения уравнения (1.21), задаваемого соотношениями (1.22), если положить в нем $x_3 = 0$. Имеем

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ линейно независимы. Значит, ранг этой системы равен трем, так как в этой системе существуют три линейно независимых вектора, а сама система (состоящая из четырех векторов) линейно зависима. Кроме того, из (1.21) и (1.22) следует, что вектор $\vec{a}_3$ представляет собой следующую линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$:

$$\vec{a}_3 = -3 \cdot \vec{a}_1 + 2 \cdot \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_4.$$

Таким образом, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ образуют базис данной системы. Причем, как нетрудно видеть, коэффициенты разложения по базису векторов системы находятся в соответствующих им столбцах табл. 1.10.

Замечание. Из рассмотренного примера вытекает следующее правило, справедливое и в общем случае: для того чтобы найти ранг и базис системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ в $\mathbb{R}^n$, необходимо при помощи метода Гаусса решить однородную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0, \end{cases}$$

представляющую собой координатную форму уравнения

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_m\vec{a}_m = 0.$$

Ранг системы векторов равен числу базисных переменных, а базис состоит из векторов, соответствующих базисным переменным.

§ 1.5. Евклидовы пространства

1. Основные понятия и примеры

Начнем с примеров.

Пример 1.9. Группа студентов совершила туристическую поездку по ряду европейских столиц. К концу путешествия они обнаружили, что в их кошельках накопились остатки валюты: 15 евро, 10 фунтов стерлингов, 20 швейцарских франков и 25 долларов США. Остатки составили “валютный” вектор

$$\vec{a} = (15, 10, 20, 25).$$

Посоветовавшись, студенты решили обратить валюту в рубли и организовать банкет. В банке они узнали курсы валют:

1 евро – 38,0 руб.,

1 британский фунт стерлингов – 45,5 руб.,

1 швейцарский франк – 26,8 руб.,

1 доллар США – 30,9 руб.

Таким образом, появился еще один четырехмерный вектор – вектор обменных курсов валют:

$$\vec{b} = (38{,}0; 45{,}5; 26{,}8; 30{,}9).$$

Чтобы определить, сколько рублей имеется на банкет, нужно выполнить следующий расчет:

$$15 \cdot 38{,}0 + 10 \cdot 45{,}5 + 20 \cdot 26{,}8 + 25 \cdot 30{,}9 = 2333{,}5 \text{ руб.}$$

Пример 1.10. Коммерческий банк, участвующий в строительстве многоэтажных автомобильных стоянок в центре Москвы, предпринял усилия по получению кредитов в трех коммерческих банках. Каждый из них предоставил кредиты в размерах соответственно 20, 40 и 40 млрд руб. под годовую процентную ставку соответственно – 20, 25 и 30 %.

В данном примере речь идет о двух векторах: трехмерном векторе кредитов $\vec{c} = (20; 40; 40)$ и векторе процентных ставок $\vec{p} = (20; 25; 30)$.

Используя простой расчет, управляющий коммерческим банком может определить, сколько придется платить по истечении года за кредиты, взятые у трех банков:

$$20 \cdot 1{,}2 + 40 \cdot 1{,}25 + 40 \cdot 1{,}3 = 126 \text{ млрд руб.}$$

На этих примерах мы можем видеть возникновение своеобразной операции над векторами из пространства $\mathbb{R}^n$, называемой *скалярным произведением* векторов. Дадим сначала абстрактное определение скалярного произведения.

Определение. *Говорят, что на линейном пространстве V задано* ***скалярное произведение,*** *если имеется правило, по которому любым двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сопоставляется число $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, удовлетворяющее следующим четырем аксиомам*:

1) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$;

2) $\left(k\vec{a}, \vec{b}\right) = k\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$;

3) $\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right)$;

4) $\left(\vec{a}, \vec{a}\right) > 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$, и если $\left(\vec{a}, \vec{a}\right) = 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$.

Замечание 1. Из данных аксиом вытекают следующие свойства скалярного произведения:

2′) $\left(\vec{a}, k\vec{b}\right) = k\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$;

3′) $\left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{a}, \vec{c}\right)$.

Рекомендуем читателю убедиться в их справедливости самостоятельно.

Определение. *Линейное пространство, на котором задано скалярное произведение, называется* ***евклидовым пространством****.*

Примером евклидова пространства служит пространство $\mathbb{R}^n$, в котором скалярное произведение векторов $\vec{a} = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ и $\vec{b} = \left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)$ задается соотношением

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n . \qquad (1.24)$$

Выполнение всех аксиом скалярного произведения очевидно.

Замечание 2. Как было показано выше, задание базиса позволяет моделировать любое конечномерное линейное пространство при помощи пространства $\mathbb{R}^n$. Поэтому рассмотренный выше пример пространства $\mathbb{R}^n$ указывает способ превращения любого конечномерного линейного пространства в евклидово пространство. Действительно, пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в некотором базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$ n-мерного линейного пространства V, тогда формула (1.24) определяет на пространстве V скалярное произведение.

Замечание 3. Если в евклидовом пространстве V выполняется условие

$$\left(\vec{b}, \vec{a}\right) = (\vec{c}, \vec{a}) \tag{1.25}$$

для любого вектора $\vec{a}$ из V, то $\vec{b} = \vec{c}$.

В самом деле, условие (1.25) равносильно тому, что $\left(\vec{b} - \vec{c}, \vec{a}\right) = 0$. Полагая в последнем соотношении $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$, имеем

$$\left(\vec{b} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}\right) = 0.$$

Отсюда в силу аксиомы 4) скалярного произведения (см. с. 42) получаем $\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$, т.е. $\vec{b} = \vec{c}$.

2. Неравенство Коши – Буняковского

Как известно из школьного курса алгебры, для векторов из пространства $\mathbb{R}^3$ справедливо равенство

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi$$

и, как следствие,

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}, \tag{1.26}$$

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} \tag{1.27}$$

(равенство (1.27) справедливо при $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$).

Равенства (1.26) и (1.27) подсказывают нам, как разумным способом определить для векторов в n-мерном евклидовом пространстве ($n > 3$) понятие модуля вектора и угла между векторами.

Определение. *Для векторов в n-мерном евклидовом пространстве* ***модуль*** $|\vec{a}|$ ***вектора*** $\vec{a}$ *и* ***косинус угла*** φ *между двумя ненулевыми векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *определяются с помощью формул* (1.26) и (1.27).

Впрочем, формула (1.27) нуждается в некотором комментарии. Дело в том, что уравнение $\cos\varphi = c$ (где φ – неизвестное число) имеет решение только при $-1 \le c \le 1$. Поэтому, чтобы данное нами определение угла между векторами было корректным, необходимо сначала убедиться, что число $\dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ заключено между –1 и 1. Это вытекает из следующего важного неравенства.

Неравенство Коши – Буняковского. *Для любых двух векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *в евклидовом пространстве справедливо неравенство*

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right)^2 \le (\vec{a}, \vec{a}) \cdot \left(\vec{b}, \vec{b}\right). \tag{1.28}$$

Доказательство. Возьмем какое-либо число t и составим вектор $\vec{c} = t\vec{a} + \vec{b}$. Имеем

$$(\vec{c}, \vec{c}) = \left(t\vec{a} + \vec{b}, t\vec{a} + \vec{b}\right) = t^2(\vec{a}, \vec{a}) + 2t\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{b}, \vec{b}\right),$$

или, обозначая $(\vec{a}, \vec{a}) = \alpha$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \beta$, $\left(\vec{b}, \vec{b}\right) = \gamma$,

$$(\vec{c}, \vec{c}) = \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma.$$

Квадратный трехчлен $\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma$, получившийся справа, при любом значении t неотрицателен (ибо $(\vec{c}, \vec{c}) \ge 0$), следовательно, его дискриминант неположителен. Таким образом, $\beta^2 - \alpha \cdot \gamma \le 0$, или

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right)^2 - (\vec{a}, \vec{a})\left(\vec{b}, \vec{b}\right) \le 0,$$

что равносильно неравенству (1.28).

Замечание 4. Из неравенства Коши – Буняковского вытекает, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо соотношение

$$\left(\vec{a},\, \vec{b}\right) \le |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|. \tag{1.29}$$

Действительно, неравенство Коши – Буняковского равносильно неравенству

$$\left|\left(\vec{a},\, \vec{b}\right)\right| \le |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|, \tag{1.30}$$

из которого вытекает (1.29).

Следствие. *Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в евклидовом пространстве справедливо соотношение, называемое* ***неравенством треугольника*****:**

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|. \tag{1.31}$$

Доказательство. Имеем

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b},\, \vec{a}+\vec{b}\right) = \left(\vec{a},\, \vec{a}\right) + 2\left(\vec{a},\, \vec{b}\right) + \left(\vec{b},\, \vec{b}\right).$$

Отсюда в силу неравенства (1.29)

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 \le \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| + \left|\vec{b}\right|^2 = \left(\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|\right)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей этого неравенства, получаем (1.31).

3. Ортогональные системы векторов

Определение. *Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в евклидовом пространстве называются* ***ортогональными*** *(друг другу), если их скалярное произведение равно нулю*:

$$\left(\vec{a},\, \vec{b}\right) = 0.$$

Для ортогональных векторов используется обозначение $\vec{a} \perp \vec{b}$. В пространстве $\mathbb{R}^3$ ортогональность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ означает перпендикулярность вектора $\vec{a}$ вектору $\vec{b}$.

Отметим некоторые очевидные *свойства ортогональных векторов*:

1) $\vec{0} \perp \vec{a}$ для любого $\vec{a}$;

2) если $\vec{a} \perp \vec{a}$, то $\vec{a} = \vec{0}$;

3) если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{b} \perp \vec{a}$;

4) если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\lambda\vec{a} \perp \mu\vec{b}$ для любых чисел λ и μ;

5) если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$.

Последнее свойство носит название *теоремы Пифагора*.

Говорят, что вектор $\vec{b}$ *ортогонален системе векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$, если он ортогонален каждому вектору этой системы.

Замечание 5. Если ненулевой вектор $\vec{b}$ ортогонален линейно независимой системе векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$, то система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s, \vec{b}$ также будет линейно независимой.

Действительно, предположим противное, что система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s, \vec{b}$ линейно зависима. Тогда существуют такие числа $c_0, c_1, ..., c_s$, не все равные нулю, что выполняется соотношение

$$c_0\vec{b} + c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + ... + c_s\vec{a}_s = \vec{0}, \tag{1.32}$$

причем $c_0 \neq 0$ в силу линейной независимости системы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$.

Умножая это уравнение скалярно на $\vec{b}$, находим

$$c_0(\vec{b}, \vec{b}) = 0.$$

Так как $\vec{b} \neq 0$, то и $(\vec{b}, \vec{b}) \neq 0$. Следовательно, $c_0 = 0$. Полученное противоречие показывает, что система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s, \vec{b}$ линейно независима.

Рассмотрим *экономический пример* на ортогональность векторов.

Таблица 1.11

Вид товара	Количество	Текущий период		Предыдущий период	
		Цена единицы товара	Расходы	Цена единицы товара	Расходы
Яйца	3	2	6	1,8	5,4
Хлеб	10	6	60	5,8	58
Кассеты	2	20	40	19	38
Общие расходы	–	–	106	–	101,4

Одним из способов нахождения индекса цен и уровня инфляции является определение стоимости “потребительской корзины”, состоящей из 300 видов товаров и услуг, получаемых городскими (или сельскими) потребителями. В табл. 1.11 приведены условные данные, на основе которых можно рассчитать индекс цен для определенного месяца по отношению к предыдущему.

Расчет индекса цен: 106/101,4·100 = 104,5 %. Таким образом, индекс инфляции составил 4,5 %.

Обозначим через $\vec{q} = (3; 10; 2)$ вектор количества потребляемых товаров, $\vec{c} = (2; 6; 20)$ – вектор цен в текущем периоде, $\vec{c}_{\text{пр}} = (1{,}8; 5{,}8; 19)$ – вектор цен в предыдущем периоде. Тогда индекс цен вычисляется по формуле

$$p = \frac{(\vec{c}, \vec{q})}{(\vec{c}_{np}, \vec{q})} \cdot 100\ \%,$$

откуда $(100\vec{c}, \vec{q}) = p(\vec{c}_{\text{пр}}, \vec{q})$, или $(100\vec{c} - p\vec{c}_{\text{пр}}, \vec{q}) = 0$.

Таким образом, индекс цен можно определить как численный коэффициент p, который делает вектор $\vec{q}$ ортогональным вектору $100\vec{c} - p\vec{c}_{\text{пр}}$.

Индекс инфляции рассчитывается по формуле

$$i = p - 100 = \frac{(\vec{c}, \vec{q})}{(\vec{c}_{np}, \vec{q})} 100 - 100 = \frac{(\vec{c} - \vec{c}_{np}, \vec{q})}{(\vec{c}_{np}, \vec{q})} \cdot 100.$$

Определение. *Система векторов в евклидовом пространстве называется* ***ортогональной****, если все векторы в ней попарно ортогональны.*

Если ортогональная система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ не содержит нулевого вектора, то она линейно независима. Действительно, подсистема, состоящая из вектора $\vec{a}_1$, линейно независима. Если подсистема $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_t$ линейно независима, то, присоединяя к ней вектор $\vec{a}_{t+1}$, получим линейно независимую систему согласно замечанию 5. Ясно, что таким образом мы получим линейную независимость всей системы.

4. Ортонормированные системы векторов

Определение. *Ортогональная система векторов в евклидовом пространстве называется* ***ортонормированной****, если модуль любого вектора системы равен единице.*

Если ортогональная система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ не содержит нулевого вектора, то система векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_s$, где

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}, \vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|}, ..., \vec{b}_s = \frac{\vec{a}_s}{|\vec{a}_s|}, \tag{1.33}$$

будет ортонормированной.

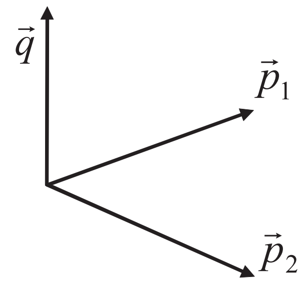

Рис. 1.2

В пространстве $\mathbb{R}^3$ для любых векторов $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ существует ненулевой вектор $\vec{q}$, ортогональный как $\vec{p}_1$, так и $\vec{p}_2$ (рис. 1.2). Этот очевидный факт может быть обобщен в виде следующей весьма важной теоремы.

Теорема 1.5. *Пусть в n-мерном евклидовом пространстве V задан набор из s векторов* $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_s$, *причем s < n. Тогда существует ненулевой вектор* $\vec{x}$, *ортогональный каждому из векторов* $\vec{p}_i$ $(i = 1, ..., s)$.

Доказательство. Выберем в пространстве V некоторый базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$. Пусть искомый вектор $\vec{x}$ имеет в этом базисе следующее разложение:

$$\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{a}_i.$$

Вычислим скалярное произведение вектора $\vec{x}$ и первого вектора системы $\vec{p}_1$. Имеем

$$(\vec{x}, \vec{p}_1) = (\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{a}_i, \vec{p}_1) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\vec{a}_i, \vec{p}_1) = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i,$$

где $b_i = (\vec{a}_i, \vec{p}_1)$. Таким образом, условие ортогональности вектора $\vec{x}$ вектору $\vec{p}_1$ имеет вид

$$b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n = 0,$$

т.е. представляет собой линейное однородное уравнение. Поэтому ортогональность вектора $\vec{x}$ каждому из векторов $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_s$ записывается в виде системы s однородных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$. Поскольку $s < n$, такая система обязательно имеет ненулевое решение, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Ортогональный базис любого нетривиального подпространства S n-мерного евклидова пространства V может быть дополнен до ортогонального базиса всего пространства.*

Доказательство. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_r$ – ортогональный базис S $(r < n)$. Так как $r < n$, то на основании теоремы 1.5 существует ненулевой вектор $\vec{a}_{r+1}$, ортогональный каждому из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_r$. Далее находим ненулевой вектор $\vec{a}_{r+2}$, ортогональный каждому из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_r, \vec{a}_{r+1}$. Продолжая этот процесс, получим ортогональный базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ пространства V.

Следствие 2. *Во всяком n-мерном евклидовом пространстве V существует ортогональный базис.*

Доказательство. Выберем в пространстве V ненулевой вектор $\vec{a}_1$. Одномерное подпространство $L(\vec{a}_1)$ тривиальным образом удовлетворяет условиям следствия 1, поэтому вектор $\vec{a}_1$ можно дополнить до ортогонального базиса $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ всего пространства V.

Следствие 3. *Во всяком n-мерном евклидовом пространстве V существует ортонормированный базис.*

Доказательство. По следствию 2 в пространстве V имеется ортогональный базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$. Тогда система векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$, определенная соотношениями (1.33), задает в евклидовом пространстве V ортонормированный базис.

5. Ортогональное дополнение подпространства

Определение. *Говорят, что вектор $\vec{b}$* ***ортогонален подпространству*** *S линейного пространства V, если он ортогонален любому вектору из пространства S.*

Очевидно, что вектор $\vec{b}$ ортогонален подпространству S тогда и только тогда, когда $\vec{b}$ ортогонален некоторому базису этого подпространства. Множество всех векторов из пространства V, ортогональных подпространству S, также является подпространством (проверьте!). Это подпространство называется *ортогональным дополнением* к подпространству S и обозначается $S^{\perp}$.

Теорема 1.6. *Для любого нетривиального подпространства S n-мерного евклидова пространства V справедливо равенство*

$$\dim S + \dim S^{\perp} = n. \tag{1.34}$$

Доказательство. Пусть $\dim S = r < n$. Выберем в подпространстве S ортогональный базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_r$. Дополним его до ортогонального базиса $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_r, \vec{a}_{r+1}, \ldots, \vec{a}_n$ линейного пространсва V. Покажем, что векторы $\vec{a}_{r+1}, \ldots, \vec{a}_n$ образуют базис ортогонального дополнения $S^{\perp}$. Эти векторы линейно независимы как подсистема линейно независимой системы. Поэтому остается доказать, что любой вектор $\vec{b}$ из подпространства $S^{\perp}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_{r+1}, \ldots, \vec{a}_n$. Разложим вектор $\vec{b}$ по базису $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r, \vec{a}_{r+1}, \ldots, \vec{a}_n$:

$$\vec{b} = c_1\vec{a}_1 + ... + c_r\vec{a}_r + c_{r+1}\vec{a}_{r+1} + \ldots + c_n\vec{a}_n.$$

Умножая это уравнение скалярно на вектор $\vec{a}_1$, получим

$$c_1(\vec{a}_1, \vec{a}_1) = 0.$$

Так как $\vec{a}_1 \neq 0$, то $(\vec{a}_1, \vec{a}_1) \neq 0$. А значит, $c_1 = 0$. Аналогично, поочередно умножая уравнение на $\vec{a}_2, ..., \vec{a}_r$, получаем $c_2 = 0$, $..., c_r = 0$. Таким образом,

$$\vec{b} = c_{r+1}\vec{a}_{r+1} + \ldots + c_n\vec{a}_n .$$

Следовательно, $\vec{a}_{r+1}, \ldots, \vec{a}_n$ – базис ортогонального дополнения $S^{\perp}$. А так как размерность пространства равна числу векторов в базисе, то $\dim S^{\perp} = n - r$. Теорема доказана.

Следствие. *Ортогональное дополнение к подпространству $S^{\perp}$ совпадает с подпрстранством S.*

Доказательство. По определению подпространство $(S^{\perp})^{\perp}$ представляет собой множество всех векторов, ортогональных $S^{\perp}$, и так как любой вектор из S ортогонален $S^{\perp}$, то S лежит в подпространстве $(S^{\perp})^{\perp}$. Имеем

$$\dim (S^{\perp})^{\perp} = n - (n - r) = r = \dim S.$$

Поскольку S лежит в подпространстве $(S^{\perp})^{\perp}$ и размерности этих двух линейных пространств равны, то $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

Таким образом, свойство быть ортогональным дополнением к подпространству является взаимным, что является обобщением свойства 3 (с. 45) ортогональных векторов.

ГЛАВА 2

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 2.1. Матрицы и операции над ними

1. Основные понятия и определения

Определение. ***Матрицей*** (*точнее*, *числовой матрицей*) *размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из чисел a_{ij} и содержащая m строк и n столбцов.

Например,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \text{ – матрица размера } 2 \times 3.$$

Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*; первый индекс в обозначении элемента указывает номер строки, а второй – номер столбца, в которых находится этот элемент. Для сокращенной записи матриц используются заглавные буквы: A, B, ...

Например,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используется также краткое обозначение матрицы: $A = \left(a_{ij}\right)$.

Две матрицы считаются *равными*, если они одного размера и равны их элементы, расположенные на одинаковых местах.

Матрицу размера $1 \times n$ (одна строка) называют обычно *матрицей-строкой*, а размера $m \times 1$ (один столбец) – *матрицей-столбцом*. Матрица-строка $1 \times n$ – это фактически вектор из пространства $\mathbb{R}^n$, а матрица $m \times 1$ – вектор из $\mathbb{R}^m$.

Например,

$$(-1, 2, 7) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Остановимся теперь на некоторых специальных типах матриц.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей* и обозначается **0**.

Матрица размера $n \times n$ называется *квадратной*, а число n – ее *порядком*. Набор элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы называется *главной диагональю*, а сумма диагональных элементов – *следом матрицы* и обозначается $\operatorname{tr} A$ (от английского слова trace).

Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, т.е. матрица вида

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется *диагональной.* Частным случаем диагональной матрицы является *единичная* матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

на главной диагонали которой стоит число 1, а вне диагонали записаны 0.

Квадратная матрица, для которой все элементы, стоящие под (над) главной диагональю, равны нулю, называется *верхней треугольной* (*нижней треугольной*).

2. Операции над матрицами

Над матрицами можно выполнять ряд операций. Прежде всего матрицы одинакового размера можно складывать.

Определение. ***Суммой*** *матриц* $A = (a_{ij})$ *и* $B = (b_{ij})$ *одного размера называется матрица A + B того же размера, определяемая равенством*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Таким образом, сложить две матрицы означает сложить их элементы, стоящие на одинаковых местах. Например,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Матрицы можно умножать на числа.

Определение. ***Произведением матрицы*** $A = (a_{ij})$ ***на число*** λ *называется матрица*

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Другими словами, умножить матрицу на число означает умножить все элементы данной матрицы на это число. Например,

$$5 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 15 & 35 \end{pmatrix}.$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами (предлагаем читателю убедиться в их справедливости самостоятельно):

1) $A + B = B + A$;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) $A + \mathbf{0} = A$;

4) $A + (-A) = \mathbf{0}$;

5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

6) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta B$;

7) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;

8) $1\cdot A=A$,

где A, B, C – произвольные матрицы одного размера, $\mathbf{0}$ – нулевая матрица того же размера, α, β – произвольные числа.

Замечание 1. Из перечисленных выше свойств 1 – 8 вытекает, что множество всех матриц размера $m \times n$ с определенными операциями сложения и умножения на число образует линейное пространство. Предлагаем читателю доказать самостоятельно, что размерность этого пространства равна mn.

Однако главные применения матриц связаны с другой операцией – *умножением* матриц. Это своеобразная операция, лежащая в основе целого раздела линейной алгебры – *алгебры матриц*.

Пусть даны две матрицы:

$$A \text{ – размера } m \times n;$$
$$B \text{ – размера } n \times k.$$

Как видно, число столбцов в матрице A по условию равно числу строк B, или, выражаясь свободнее, длина строки в матрице A совпадает с высотой столбца в матрице B. В этом случае можно определить матрицу $C = AB$, которая будет иметь размеры $m \times k$ (правило для запоминания: $\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{k}=\frac{m}{k}$). Элемент c_{ij} матрицы C, расположенный в произвольной i-й строке ($i = 1, ..., m$) и произвольном j-м столбце ($j = 1, ..., k$), по определению равен скалярному произведению двух векторов из пространства $\mathbb{R}^n$: i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + ... + a_{in}\cdot b_{nj}.$$

Например:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 0+(-2)\cdot 0 & 3\cdot(-1)+(-2)\cdot 2 \\ 1\cdot 0+4\cdot 0 & 1\cdot(-1)+4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+1\cdot 1+(-3)\cdot 1 \\ 1\cdot 2+2\cdot 1+4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ – произведение не существует, так как длина строки в матрице A, равная 2, не совпадает с высотой столбца в матрице B, равной 3.

Умножение матриц обладает свойствами:

1) $(AB)C = A(BC)$;

2) $A(B + C) = AB + AC$;

3) $(A + B)C = AC + BC$;

4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

5) $AE = A$, $EA = A$.

Докажем первое свойство, называемое *сочетательным законом умножения* (остальные свойства доказываются аналогично). Доказательство в общем виде требует довольно громоздких записей, поэтому ограничимся только случаем квадратных матриц.

Пусть A, B, C – квадратные матрицы одного и того же размера 2×2. Запишем их так:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$(AB)C = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} (a_1b_1+a_2b_3)c_1+(a_1b_2+a_2b_4)c_3 & (a_1b_1+a_2b_3)c_2+(a_1b_2+a_2b_4)c_4 \\ (a_3b_1+a_4b_3)c_1+(a_3b_2+a_4b_4)c_3 & (a_3b_1+a_4b_3)c_2+(a_3b_2+a_4b_4)c_4 \end{pmatrix};$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1c_1+b_2c_3 & b_1c_2+b_2c_4 \\ b_3c_1+b_4c_3 & b_3c_2+b_4c_4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_1(b_1c_1+b_2c_3)+a_2(b_3c_1+b_4c_3) & a_1(b_1c_2+b_2c_4)+a_2(b_3c_2+b_4c_4) \\ a_3(b_1c_1+b_2c_3)+a_4(b_3c_1+b_4c_3) & a_3(b_1c_2+b_2c_4)+a_4(b_3c_2+b_4c_4) \end{pmatrix}.$$

Сравнивая полученные выражения для матриц $(AB)C$ и $A(BC)$, убеждаемся в их полном совпадении. Например, элемент матрицы $(AB)C$, расположенный в первой строке и втором столбце, равен

$$a_1b_1c_2+a_1b_2c_4+a_2b_3c_2+a_2b_4c_4\,,$$

но точно такое же выражение имеет и элемент матрицы $A(BC)$, расположенный в том же месте.

Замечание 2. Умножение матриц в некоторых отношениях сходно, но в других отношениях отличается от умножения чисел. Так $ab = ba$ для чисел, но $AB \neq BA$ (в общем случае) для матриц.

Например,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 13 & 21 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & 23 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 26 \end{pmatrix},\text{ но } \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ – не существует.}$$

Если для матриц A и B имеет место условие

$$AB = BA,$$

то говорят, что матрицы A и B *коммутируют.* Например, диагональная матрица порядка n коммутирует с любой другой диагональной матрицей того же порядка.

Любой матрице A размера $m \times n$ можно сопоставить матрицу A^T (читается: матрица, *транспонированная* к A) размера $n \times m$. Строки матрицы A^T – это столбцы матрицы A с сохранением их порядка. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Предоставляем читателю возможность проверить самостоятельно следующие свойства операции транспонирования:

$$(AB)^T = B^T \cdot A^T,$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T,$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T,$$

$$(A^T)^T = A.$$

Пример 2.1. Предприятие выпускает три вида продукции P_1, P_2, P_3, используя два вида сырья S_1, S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} \end{array}$$

(обозначения P_1, P_2, P_3, S_1, S_2 поставлены в матрице для наглядности. Например, число $a_{21} = 3$ в матрице A означает, что на выпуск одной единицы продукции P_1 расходуется 3 единицы сырья S_2). Предлагается определить затраты сырья, необходимые для осуществления следующего выпуска товаров:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 150 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е . Затраты S_1 составляют, очевидно, $5 \cdot 150 + 0 \cdot 120 + 4 \cdot 80$ ед., а затраты S_2 – $3 \cdot 150 + 1 \cdot 120 + 4 \cdot 80$ ед. Отсюда видно, что вектор-столбец $\vec{S} = (S_1, S_2)^T$ затрат сырья может быть записан в виде произведения

$$\vec{S} = A \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1070 \\ 890 \end{pmatrix}.$$

Допустим, что, кроме этих данных, указана еще и стоимость каждого вида сырья (в расчете на единицу сырья):

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 20 & 30 \end{pmatrix}.$$

Тогда стоимость всего затраченного сырья будет

$$20 \cdot 1070 + 30 \cdot 890 = 48100,$$

или, в матричной записи:

$$\text{стоимость сырья} = \begin{pmatrix} 20 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1070 \\ 890 \end{pmatrix} = \vec{p} A \vec{c}\,.$$

Разумеется, если будет необходимо решить другую подобную задачу, то можно, не повторяя рассуждений, сразу записать ответ в виде $\vec{p} A \vec{c}$.

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *симметрической*, если

$$A^T = A. \tag{2.1}$$

Например, симметрической является матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 7 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Соотношение (2.1) равносильно тому, что для элементов матрицы имеет место условие

$$a_{ij} = a_{ji}$$

для любых i и j. Это означает, что элементы этой матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой. Отсюда возникло название – *симметрическая матрица*.

Замечание 3. Множество всех симметрических матриц является подпространством линейного пространства квадратных матриц порядка n. Рекомендуем читателю самостоятельно выяснить, какова размерность этого подпространства.

Квадратная матрица O называется *ортогональной*, если ее столбцы образуют ортонормированную систему векторов. Это условие можно записать в виде одного матричного равенства

$$O \cdot O^T = E. \tag{2.2}$$

Для простоты проверим равенство (2.2) на примере квадратной матрицы порядка два:

$$O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$O \cdot O^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая диагональные элементы матрицы $O \cdot O^T$ единице, получим условие нормированности векторов-столбцов матрицы O. Элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, что равносильно условию ортогональности векторов-столбцов.

Пример 2.2. Пусть $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ – матрица-строка. Проверить ортогональность матрицы

$$O = E - 2X^T X.$$

Решение. Имеем

$$X^T X = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix},$$

поэтому

$$O = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Теперь ортогональность матрицы O проверяется непосредственно.

Ортогональность матрицы O можно проверить и более простым способом. Для этого заметим, что вектор X единичный, т.е. $X \cdot X^T = 1$. Поэтому

$$O \cdot O^T = \left(E - 2X^T \cdot X\right)\left(E - 2X^T \cdot X\right).$$

Раскроем скобки и приведем подобные (сохраняя порядок сомножителей)

$$OO^T = E^2 - 4X^T \cdot X + 4\left(X^T \cdot X\right)\left(X^T \cdot X\right).$$

Далее воспользуемся ассоциативностью умножения матриц и сгруппируем сомножители по-другому, что и приводит к нужному результату.

$$OO^T = E - 4X^T \cdot X + 4X^T \cdot \left(X \cdot X^T\right) \cdot X = E - 4X^T \cdot X + 4X^T \cdot X = E.$$

§ 2.2. Матрицы и системы линейных уравнений

1. Матричная запись систем линейных уравнений

Одно из важных применений матриц связано с рассмотрением систем линейных уравнений.

Пусть дана система $m \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Введем в рассмотрение матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (2.3) можно заменить единственным уравнением

$$AX = B\,. \qquad (2.4)$$

Действительно, матрицы AX и B имеют один и тот же размер $m \times 1$, т.е. каждая из них представляет собой столбец "высотой" m. Приравнивая друг другу первые элементы этих столбцов, получим

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\,,$$

что в точности совпадает с первым уравнением системы (2.3). Аналогичный результат дает сравнение вторых элементов, третьих и т.д. В итоге получаем, что уравнение (2.4) равнозначно системе уравнений (2.3).

Уравнение (2.4) называют *матричной записью* системы линейных уравнений (2.3), а матрицу A – *матрицей системы*.

Например, система

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 4 \end{cases}$$

в матричной записи выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Ранг матрицы и элементарные преобразования

Матрицу размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

можно рассматривать как систему, состоящую из m векторов-строк (векторов пространства $\mathbb{R}^n$), или как систему, состоящую из n векторов-столбцов (векторов пространства $\mathbb{R}^m$).

Определение. ***Рангом матрицы*** *A (обозначается* $\operatorname{rk} A$*) называется ранг системы векторов, образуемых строками матрицы.*

Замечание 1. Из определения следует, что ранг матрицы размера $m \times n$ есть целое число, заключенное в пределах от 0 до m. Причем $\operatorname{rk} A = 0$ только лишь в случае, когда $A = 0$.

Элементарными преобразованиями над строками матрицы называется любое из следующих действий:

1) вычеркивание нулевой строки (если таковая имеется);
2) перестановка строк;
3) умножение любой строки на число $\lambda \neq 0$;
4) прибавление к одной из строк другой строки, умноженной на любое число.

Иначе говоря, речь идет о тех же самых элементарных преобразованиях, которые используются в методе Гаусса, с той лишь разницей, что теперь эти преобразования выполняются не над уравнениями системы, а над строками матрицы.

Отметим, что преобразования 2), 3), 4) обладают *свойством обратимости*. Это означает, что если матрица B может быть получена из матрицы A при помощи конечного числа элементарных преобразований такого вида, то и матрица A может быть получена из матрицы B при помощи конечного числа элементарных преобразований.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма. *Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях над строками матрицы.*

Доказательство. Пусть матрица B получена из матрицы A при помощи конечного числа элементарных преобразований вида 3) или 4) (для преобразований вида 1) и 2) выполнение утверждения леммы очевидно). Тогда каждый из векторов-строк $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_m$ матрицы B представляет собой линейную комбинацию векторов-строк $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m$ матрицы A. Следовательно, $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_m$ принадлежат линейной оболочке $L(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m)$. Значит, $L\left(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_m\right)$ является подпространством $L(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m)$ и поэтому

$$\dim L(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_m) \le \dim L(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m).$$

Это означает, что $\operatorname{rk} B \le \operatorname{rk} A$. В силу обратимости преобразований 3) и 4) имеем $\operatorname{rk} B \ge \operatorname{rk} A$. Таким образом, $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} A$. Лемма доказана.

Пример 2.3. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 & -4 \\ -3 & 10 & 2 & 1 \\ 7 & -24 & -2 & 1 \\ 4 & -13 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях, так что приведем матрицу A к лестничному виду методом Гаусса. Имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 & -4 \\ -3 & 10 & 2 & 1 \\ 7 & -24 & -2 & 1 \\ 4 & -13 & -4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & 12 & 15 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -14 & -17 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате получили матрицу с двумя линейно независимыми строками, так что ранг исходной матрицы равен 2.

3. Пространство решений однородной системы уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

или в матричном виде

$$AX = 0. \tag{2.6}$$

Пусть векторы X и Y из $\mathbb{R}^n$ являются решениями этой системы, тогда любая их линейная комбинация также будет ее решением. Действительно,

$$A(\alpha X + \beta Y) = \alpha \cdot AX + \beta \cdot AY = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

Отсюда следует, что множество всех решений однородной системы из m уравнений с n неизвестными является подпространством пространства $\mathbb{R}^n$. Естественно, возникает вопрос: какова размерность этого подпространства? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть ранг матрицы A однородной системы* (2.5) *равен r, тогда размерность линейного пространства решений этой системы равна $n - r$, где n – число неизвестных системы.*

Доказательство. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ – система векторов-строк матрицы A. Обозначим через L – линейную оболочку этих векторов. Так как по условию теоремы ранг матрицы A равен r, то $\dim L = r$. Уравнения системы (2.5) могут быть записаны следующим образом:

$$(\vec{a}_1, \vec{x}) = 0, \cdots, (\vec{a}_m, \vec{x}) = 0, \tag{2.7}$$

т.е. представляют собой условие ортогональности вектора $\vec{x}$ подпространству L. Таким образом, пространство решений системы (2.5) является ортогональным дополнением к L. На основании теоремы 1.5 $\dim L^{\perp} = n - r$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Однородная система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных.*

Доказательство. Однородная система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда размерность пространства решений однородной системы (равная на основании теоремы 2.1 $n - r$) больше нуля. А это эквивалентно тому, что $n > r$.

Следствие 2. *Ранг матрицы не меняется при транспонировании.*

Другими словами, ранг матрицы A равен рангу системы векторов, образуемых столбцами матрицы.

Доказательство. Пусть ранг матрицы A размера $m \times n$ равен r, тогда размерность линейного пространства решений системы (2.5) равна $n - r$. Следовательно, общее решение этой системы будет содержать $n - r$ базисных и r свободных неизвестных. Но число базисных переменных (см. замечание в конце § 1.4) равно рангу системы векторов, образуемых столбцами матрицы A. Утверждение доказано.

Замечание 2. Из следствия 2 вытекает, что ранг матрицы A размера $m \times n$ не превышает $\min(n, m)$.

Определение. *Базис линейного пространства решений однородной системы* (2.5) *называется* ***фундаментальным набором решений*** *этой системы.*

Как следует из теоремы 2.1, фундаментальный набор решений системы (2.5) состоит из $n - r$ линейно независимых решений этой системы: $X_1, \ldots, X_{n-r}$, где r – ранг матрицы системы. Так как любое другое решение X этой системы является линейной комбинацией $X_1, \ldots, X_{n-r}$, то общее решение однородной системы (2.5) в матричной форме имеет вид

$$X = C_1 X_1 + \ldots + C_{n-r} X_{n-r}, \tag{2.8}$$

где C_1, C_2, ..., C_{n-r} – произвольные постоянные.

Пример 2.4. Найти фундаментальный набор решений системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Решим эту систему методом Гаусса. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & 8 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 9 & 11 & 0 & -4 & 0 \\ 9 & 11 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2{,}5 & -2{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ -2{,}25 & -2{,}75 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, общим решением этой системы будет

$$\begin{cases} x_3 = 2{,}5x_1 + 2{,}5x_2, \\ x_4 = 2{,}25x_1 + 2{,}75x_2. \end{cases} \tag{2.9}$$

Так как общее решение содержит две свободные переменные, то размерность пространства решений равна двум. Значит, фундаментальный набор решений будет состоять из двух решений. Полагая в (2.9) сначала $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, а затем $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, получим соответственно

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2{,}5 \\ 2{,}25 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2{,}5 \\ 2{,}75 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы линейно независимы. Следовательно, фундаментальный набор решений исходной однородной системы уравнений состоит из векторов X_1 и X_2.

Как было показано выше, любая однородная система из m линейных уравнений с n неизвестными задает в $\mathbb{R}^n$ некоторое подпространство L. Рассмотрим теперь обратную задачу. Пусть в подпространстве $L \subset \mathbb{R}^n$ выбран базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_r$. Наша цель – построить систему уравнений, которой удовлетворяли бы векторы из L и только они.

Рассмотрим систему уравнений, определяющую подпространство $L^{\perp}$:

$$(\vec{a}_1, \vec{x}) = 0, \cdots, (\vec{a}_r, \vec{x}) = 0. \tag{2.10}$$

Пусть $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_{n-r}$ – некоторый фундаментальный набор решений системы (2.10), т. е. базис $L^{\perp}$. Тогда ортогональное дополнение к $L^{\perp}$ задается системой

$$(\vec{b}_1, \vec{x}) = 0, \cdots, (\vec{b}_{n-r}, \vec{x}) = 0. \tag{2.11}$$

Полученная система и будет искомой, так как $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

Подведем некоторый итог. Чтобы получить систему уравнений для подпространства L, следует взять какой-либо базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_r$ этого подпространства, затем рассмотреть систему (2.10), задающую $L^{\perp}$, и найти некоторый фундаментальный набор решений $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_{n-r}$ для этой системы. Тогда система уравнений (2.11) и будет искомой.

Замечание 3. Из проведенных выше рассуждений следует, что подпространство L размерности r пространства $\mathbb{R}^n$ может быть задано однородной системой из $n - r$ уравнений (меньше уравнений быть не может, так как ранг матрицы системы должен быть равен $n - r$).

Пример 2.5. Пусть

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– базис подпространства L в $\mathbb{R}^4$. Найти систему уравнений, задающих L.

Р е ш е н и е . Рассмотрим систему уравнений, задающую $L^{\perp}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, общим решением этой системы будет

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 - x_2, \\ x_4 = -x_1 + 2x_2. \end{cases} \tag{2.12}$$

Полагая в (2.12) сначала $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, а затем $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, получаем фундаментальный набор решений этой системы

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, однородная система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

является искомой системой, задающей подпространство L.

4. Неоднородные системы линейных уравнений и подпространства в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим неоднородную систему $m \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \tag{2.13}$$

или в матричной форме

$$AX = B. \tag{2.14}$$

Система

$$AX = 0 \tag{2.15}$$

называется *однородной системой*, *соответствующей неоднородной системе* (2.14). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Общее решение X неоднородной системы* (2.14) *есть сумма частного решения X_0 этой системы и общего решения соответствующей ей однородной системы* (2.15).

Доказательство. Покажем сначала, что сумма частного решения X_0 неоднородной системы (2.14) и произвольного решения X_1 однородной системы (2.15) также является решением системы (2.14). Имеем

$$A(X_0 + X_1) = AX_0 + AX_1 = B + 0 = B,$$

что и требовалось доказать. Теперь нам остается доказать, что всякое решение X неоднородной системы есть сумма частного решения X_0 неоднородной системы (2.14) и некоторого решения X_1 соответствующей однородной системы. Имеем

$$A(X - X_0) = AX - AX_0 = B - B = 0.$$

Следовательно, $X_1 = X - X_0$ – решение однородной системы (2.15), значит, $X = X_1 + X_0$, что завершает доказательство.

Поскольку общему решению однородной системы можно сопоставить некоторое линейное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$, то общее решение неоднородной системы мы можем записать в виде $X_0 + L$, где X_0 – некоторое частное решение. Будем называть его *сдвинутым подпространством*. И наоборот, для всякого сдвинутого подпространства X можно задать систему линейных уравнений, множество решений которой есть X. Действительно, мы видели, что подпространство L можно задать некоторой однородной системой уравнений. Подставляя координаты X_0 в левые части этой системы, получим правые части искомой неоднородной системы. Подведем итог наших рассуждений в виде теоремы.

Теорема 2.3. *Для всякой неоднородной системы множество ее решений X образует сдвинутое подпространство. Для всякого сдвинутого подпространства найдется система линейных уравнений, множество решений которой есть X.*

§ 2.3. Определители

1. Определители второго и третьего порядка

Каждой квадратной матрице $n \times n$ по некоторому закону может быть поставлено в соответствие число $|A|$, называемое *определителем матрицы A*, или просто *определителем n-го порядка*. Этот параграф посвящен введению понятия и свойствам определителя, а также применению определителей для решения различных задач линейной алгебры.

Определитель второго порядка вводится при помощи формулы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \tag{2.16}$$

а *определитель третьего порядка* – формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{2.17}$$

Запомнить формулу (2.17) можно с помощью двух схем (рис. 2.1):

Рис. 2.1

На левой схеме рис. 2.1 соединены линиями каждые три элемента определителя, произведение которых входит в правую часть формулы (2.17) со знаком “+”; на правой схеме показаны произведения, входящие со знаком “–”.

Рассмотрим пример применения определителей для решения геометрической задачи. Из школьного курса известна формула для вычисления площади параллелограмма со сторонами a и b:

$$S = ab\sin\alpha,$$

где α – угол между сторонами.

Определим площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12})$ и $\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22})$ из $\mathbb{R}^2$. Имеем

$$S = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \sin\alpha. \tag{2.18}$$

Принимая во внимание, что $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ и $\cos\alpha = \dfrac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}$, преобразуем формулу (2.18). Имеем

$$S = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \sqrt{1 - \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)^2}{|\vec{a}_1|^2 \cdot |\vec{a}_2|^2}} = \sqrt{|\vec{a}_1|^2 \cdot |\vec{a}_2|^2 - (\vec{a}_1, \vec{a}_2)^2},$$

или в координатной форме

$$S=\sqrt{\left(a_{11}^2+a_{12}^2\right)\cdot\left(a_{21}^2+a_{22}^2\right)-\left(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}\right)^2}\,.$$

Отсюда после несложных преобразований находим

$$S=\sqrt{(a_{11}a_{22})^2-2(a_{11}a_{22})\cdot(a_{21}a_{12})+(a_{21}a_{12})^2}=\left|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right|. \quad (2.19)$$

Сравнивая (2.16) и (2.19), приходим к выводу, что *площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a}_1=(a_{11},a_{12})$ *и* $\vec{a}_2=(a_{21},a_{22})$ *из* $\mathbb{R}^2$, *равна абсолютному значению определителя, составленного из координат этих векторов*.

2. Миноры и алгебраические дополнения

Чтобы подметить общую закономерность в выражениях (2.16) и (2.17), необходимо ввести понятия *минора* и *алгебраического дополнения*.

Рассмотрим определитель n-го порядка

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Выделим в нем какой-то определенный элемент a_{ij}. Вычеркнем из определителя строку и столбец, в которых расположен элемент a_{ij} (т.е. i-ю строку и j-й столбец). Останется некоторый определитель (n – 1)-го порядка. Этот определитель называется *минором элемента* a_{ij} в определителе $|A|$ и обозначается M_{ij}.

Например, в случае определителя четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

имеем

$$M_{23}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3 & 7\\ 2 & 3 & 7 & 1\\ 0 & 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 7\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=-8-14+1=-21.$$

Разумеется, определение минора можно признать пока только условным, поскольку само понятие определителя порядка n введено лишь для случаев $n = 2$ и $n = 3$.

Определение. ***Алгебраическим дополнением элемента*** a_{ij} *в определителе* $|A|$ *называется число*

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\,M_{ij}.$$

Например,

$$A_{13}=M_{13},\ A_{21}=-M_{21}.$$

Если воспользоваться понятием алгебраического дополнения, то формулы (2.16) и (2.17) можно записать в следующем виде:

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}\ \ (n=2), \tag{2.20}$$

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\ \ (n=3). \tag{2.21}$$

Равенства (2.20) и (2.21) проверяются непосредственно, поскольку при $n = 2$ имеем $A_{11}=a_{22}$, $A_{12}=-a_{21}$, а при $n = 3$

$$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32},$$

$$A_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33},$$

$$A_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}.$$

3. Определитель матрицы *n*-го порядка

Формулы (2.20) и (2.21) подсказывают, каким должно быть *определение* определителя любого порядка n.

Определение. ***Определителем*** *квадратной матрицы* A (*или просто* ***определителем n-го порядка***) *называется сумма произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения*:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}. \qquad (2.22)$$

Заметим, что наряду с обозначением $|A|$ часто используется обозначение $\det A$.

Поскольку определители второго и третьего порядков уже определены, формула (2.22) позволяет находить определители четвертого порядка, затем пятого и т.д.

Например,

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 6 \\ -2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 3A_{13} + 4A_{14} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) +$$

$$+ 3\left(5\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}\right) -$$

$$- 4\left(5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -(2 \cdot 2 - 4 + 6 \cdot 2) + 3(5 \cdot 4 - 2(-36) + 6(-20)) - 4(5 \cdot 2 - 2(-28) + 1(-20)) = -280.$$

Во введенном понятии определителя первая строка играет особую роль. Между тем, если обратиться к выражению (2.17) для определителя третьего порядка, то увидим, что его можно записать и в таком виде:

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23},$$

а также в виде

$$a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Это делает правдоподобной гипотезу: определитель равен произведению элементов *любой* строки на их алгебраические дополнения.

Оказывается, что такая гипотеза не только правдоподобна, но и просто верна. Справедлива следующая теорема.

Основная теорема об определителях. *Определитель равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения.*

Иначе говоря, для определителя n-го порядка при любом i ($i = 1, 2, ..., n$) справедливо равенство

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}. \tag{2.23}$$

Доказательство основной теоремы не приводится.

Равенство (2.23) называется *разложением определителя по i-й строке.* С его помощью нахождение определителя $|A|$ n-го порядка сводится к нахождению ряда миноров, т.е. определителей $(n – 1)$-го порядка; каждый из последних выражается через определители $(n – 2)$-го порядка и т.д. В целом получается все же громоздкая процедура. Однако ее можно сильно упростить, если познакомиться со свойствами определителей.

4. Свойства определителей

Ниже речь будет идти о свойствах двоякого рода. С одной стороны, укажем ряд действий над определителем, которые не меняют его величины или умножают ее на –1; с другой стороны, будут указаны некоторые признаки равенства определителя нулю.

Свойство 1. *Если какая-либо строка определителя состоит из нулей, то и сам определитель равен нулю.*

Для доказательства достаточно разложить определитель по элементам данной строки.

Свойство 2. *При перестановке любых двух строк определитель умножается на* -1.

Ограничимся рассмотрением определителя третьего порядка. Возможны два случая.

1. Переставляются две соседние строки, например первая и вторая. Положим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Необходимо доказать, что $\Delta' = -\Delta$. Для этого разложим определитель Δ по первой строке, а Δ' – по второй. Получим

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

откуда непосредственно следует $\Delta' = -\Delta$.

2. Переставляются две несоседние строки, а именно первая и третья. Такую перестановку можно осуществить в три шага: сначала переставить первую строку со второй, затем вторую с третьей, наконец, снова первую со второй. При каждом шаге определитель умножается на –1; так как шагов – три, т.е. нечетное число, то в итоге получаем $\Delta' = -\Delta$.

Свойство 3. *Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.*

Действительно, пусть в определителе Δ i-я строка совпадает с j-й. Поменяв эти строки местами, получим определитель Δ', ничем не отличающийся от Δ, т.е. $\Delta' = \Delta$. С другой стороны, в силу свойства 2 должно быть $\Delta' = -\Delta$. Отсюда $\Delta = -\Delta$, т.е. $\Delta = 0$.

Свойство 4. *Общий множитель элементов любой строки можно вынести за знак определителя.*

Например,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для доказательства свойства 4 достаточно разложить по первой строке определитель, стоящий слева.

Свойство 5. *Если элементы некоторой строки определителя* Δ *представлены в виде суммы двух слагаемых, то и сам определитель равен сумме двух определителей* Δ_1 *и* Δ_2. *В определителе* Δ_1 *указанная строка состоит из первых слагаемых, в* Δ_2 *– из вторых. Остальные строки определителей* Δ_1 *и* Δ_2 *– те же, что и в* Δ.

Например,

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для доказательства разложим определитель, стоящий слева, по первой строке. Получим сумму

$$(b_{11}+c_{11})A_{11}+(b_{12}+c_{12})A_{12}+(b_{13}+c_{13})A_{13}$$

или, после раскрытия скобок,

$$(b_{11}A_{11}+b_{12}A_{12}+b_{13}A_{13})+(c_{11}A_{11}+c_{12}A_{12}+c_{13}A_{13}).$$

Первая из этих двух сумм равна первому из определителей справа, вторая сумма равна второму определителю.

Свойство 6. *Величина определителя не изменится, если к одной из строк прибавить другую строку, умноженную на какое угодно число.*

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для доказательства применим к определителю, стоящему слева, свойство 5. Найдем, что этот определитель равен

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Второй из этих определителей равен нулю, так как после вынесения за знак определителя общего множителя k элементов первой строки получается определитель с двумя одинаковыми строками.

Свойство 7. *Сумма произведений элементов любой строки на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другой строки равна нулю.*

Например, в случае определителя третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

справедливо равенство

$$a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13} = 0. \qquad (2.24)$$

Слева стоит сумма произведений элементов второй строки на алгебраические дополнения к соответствующим элементам первой.

Для доказательства (2.24) рассмотрим определитель

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

который равен нулю в силу свойства 3.

Разлагая его по элементам первой строки, получим

$$0 = a_{21} A'_{11} + a_{22} A'_{12} + a_{23} A'_{13},$$

где A'_{11}, A'_{12}, A'_{13} – алгебраические дополнения для элементов первой строки в определителе Δ'. Но очевидно, что $A'_{11} = A_{11}$, $A'_{12} = A_{12}$, $A'_{13} = A_{13}$, откуда и следует равенство (2.24).

Свойство 8. *Определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы* A^T:

$$|A| = \left|A^T\right|,$$

т. е. определитель не меняется при транспонировании.

Доказательство не приводится.

Из свойства 8 следует, что любое из свойств определителя остается справедливым, если в его формулировке заменить всюду слово “строка” словом “столбец”. В частности, справедлива следующая теорема – аналог основной теоремы для столбцов.

Теорема 2.4. *Определитель равен сумме произведений элементов любого столбца на их алгебраические дополнения.*

Это означает, что при любом $i = 1, 2, ..., n$, где n – порядок определителя, справедливо равенство

$$|A| = a_{1i} \cdot A_{1i} + a_{2i} \cdot A_{2i} + \ldots + a_{ni} A_{ni}, \tag{2.25}$$

называемое *разложением определителя по i-му столбцу.*

Свойство 9. *Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц, т. е.*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Доказательство не приводится.

5. Практический способ вычисления определителей

Практическое вычисление определителей основано на формуле (2.24) разложения определителя по строке

$$|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + ... + a_{in} A_{in}$$

или аналогичной формуле (2.25) разложения по столбцу. Последнее равенство принимает особенно простой вид, если в i-й строке определителя все элементы равны нулю, кроме одного, скажем a_{ij}.

Тогда получим

$$|A| = a_{ij} A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} .$$

Вычисление определителя n-го порядка $|A|$ сводится к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка M_{ij}. Хотя в данном определителе может не оказаться строки с нужным количеством нулей, тем не менее, всегда можно, не изменяя величины определителя, преобразовать его так, чтобы в выбранной по желанию строке все элементы, кроме одного, оказались нулями. Это преобразование основано на свойстве 6 определителя. При этом, “делая нули” в строке, следует использовать “столбцевой” вариант свойства 6, т.е. определитель не изменится, если к одному из столбцов прибавить другой, умноженный на какое угодно число. Напротив, “обнуляя” элементы столбца, используем свойство 6 в “строчной“ формулировке.

Способ преобразования определителя к нужному виду приведен в следующем примере.

Пример 2.6. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Во второй строке уже есть один нуль, поэтому займемся именно этой строкой. Постараемся, не изменяя величины определителя, преобразовать его так, чтобы во второй строке все элементы оказались равными нулю, кроме, скажем, $a_{24} = 1$ (что-то вроде “разрешающего элемента” в методе Гаусса). Для этого оперируем со столбцами: ко второму столбцу прибавляем четвертый, умноженный на 2, и к третьему – четвертый, умноженный на –2. Получим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix},$$

по-прежнему равный Δ.

Разлагаем этот определитель по второй строке:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Получившийся определитель третьего порядка можно уже вычислить непосредственно, но можно и с ним поступить аналогично: к третьему столбцу прибавить первый, умноженный на 1. В результате

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

§ 2.4. Обратная матрица

1. Определение обратной матрицы

Условимся дальше рассматривать квадратные матрицы размера $n \times n$, где n – фиксированное число. Тогда произведение AB имеет смысл для любых матриц A и B.

Известно, что для любого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1}, для которого

$$a^{-1}a = 1, \ aa^{-1} = 1.$$

По аналогии с этим введем понятие обратной матрицы.

Определение. *Пусть A – квадратная матрица $n \times n$. Матрица B (того же размера) называется* ***обратной*** *для A, если*

$$AB = BA = E. \tag{2.26}$$

Обратную матрицу A обычно обозначают A^{-1}.

Замечание 1. *Если обратная матрица существует, то она единственна.*

Действительно, предположим противное. Пусть у матрицы A наряду с обратной матрицей B существует еще одна обратная матрица C. Тогда

$$B = BE = BAC = EC = C.$$

Следовательно, матрицы B и C совпадают.

Замечание 2. *Не у всякой ненулевой квадратной матрицы существует обратная.*

Рассмотрим, например, матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что у нее существует обратная матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \neq E.$$

Мы получили противоречие, доказывающее, что у матрицы A не существует обратной.

Оказывается, что условием существования обратной матрицы (аналогичным условию $a \neq 0$ для чисел) является свойство *невырожденности* матрицы A. Доказательство приводится ниже.

2. Невырожденные матрицы

Определение. *Квадратная матрица A называется* ***невырожденной****, если ее строки линейно независимы, и* ***вырожденной*** *в противном случае.*

Условие невырожденности квадратной матрицы A порядка n, как нетрудно видеть, равносильно тому, что ранг матрицы A равен n.

Отметим одно важное свойство невырожденных матриц. Так как элементарные преобразования не меняют ранг матрицы, то, *проделав над строками невырожденной матрицы A элементарное преобразование, получим снова невырожденную матрицу.*

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Для любой невырожденной матрицы A существует обратная матрица A^{-1}.*

Докажем эту теорему и одновременно дадим способ нахождения обратной матрицы.

Рассмотрим задачу с более общих позиций: будем решать матричное уравнение

$$AX = B,$$

где A и B – две данные матрицы, а X – неизвестная матрица. В частном случае, когда $B = E$, матрица X будет обратной к A.

Способ решения уравнения $AX = B$

Пусть A – невырожденная матрица. Приведем ее с помощью элементарных преобразований над строками к единичной матрице E (возможность такого приведения будет доказана). *Если затем те же самые преобразования применить к строкам матрицы B, то получим искомую матрицу X.*

Заметим, что нет необходимости специально запоминать преобразования, совершенные над A, чтобы проделать их над B. Вместо этого можно приписать к A (например, справа) матрицу B

$$\left(A \mid B\right)$$

и выполнять преобразования сразу над “сдвоенной” матрицей. После того как левая половина приведется к E, правая приведется к искомой матрице X.

Доказательство. Для сокращения записей будем считать $n = 3$. Обозначим столбцы матрицы B через $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ и рассмотрим каждую из следующих трех систем уравнений:

$$A\vec{x} = \vec{b}_1,\ A\vec{x} = \vec{b}_2,\ A\vec{x} = \vec{b}_3, \tag{2.27}$$

где $\vec{x}$ обозначает матрицу-столбец $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Будем решать эти системы поочередно одну за другой, применяя метод Гаусса.

Начнем с первой системы

$$A\vec{x} = \vec{b}_1. \tag{2.28}$$

Исходная таблица Гаусса для решения этой системы имеет вид

x_1	x_2	x_3	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_{11}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_{21}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_{31}

В процессе преобразований не может появиться противоречивое уравнение

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = b \text{ (где } b \neq 0),$$

ибо при элементарных преобразованиях над строками матрицы A она должна оставаться невырожденной, а в невырожденной матрице не может быть нулевых строк. По тем же причинам не может появиться уравнение

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0,$$

т.е. число уравнений в системе меняться не будет. Но в таком случае мы должны после ряда шагов прийти к системе из трех уравнений, где каждому уравнению соответствует свое базисное неизвестное, т.е. к системе вида

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = c_{11}, \\ \qquad x_2 \qquad = c_{21}, \\ \qquad\qquad x_3 = c_{31}. \end{cases} \tag{2.29}$$

Заметим, что матрица из коэффициентов при неизвестных в этой системе есть единичная матрица E. Отметим этот факт особо: *невырожденная матрица A приводится к единичной матрице с помощью элементарных преобразований над строками.*

Обозначим столбец свободных членов в системе (2.29) через $\vec{c}_1$. Поскольку система (2.29) равносильна исходной системе (2.28), имеем:

$$A\vec{c}_1 = \vec{b}_1.$$

Обратимся ко второй из систем (2.27):

$$A\vec{x} = \vec{b}_2. \tag{2.30}$$

Если те же самые элементарные преобразования, что использовались для решения системы (2.28), применить и здесь, то получим решение системы (2.30), т.е. такой столбец $\vec{c}_2$, что $A\vec{c}_2 = \vec{b}_2$. Аналогично получим такой столбец $\vec{c}_3$, что $A\vec{c}_3 = \vec{b}_3$. Итак, имеем

$$A\vec{c}_1 = \vec{b}_1,\ A\vec{c}_2 = \vec{b}_2,\ A\vec{c}_3 = \vec{b}_3. \tag{2.31}$$

Составим из столбцов $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, $\vec{c}_3$ матрицу C:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда вместо трех равенств (2.27) можно записать одно:

$$AC = B,$$

т.е. C – искомая матрица. Причем, как видно из наших рассуждений, каждый ее столбец $\vec{c}_i$ получается из соответствующего столбца $\vec{b}_i$ с помощью тех же самых элементарных преобразований, которые переводят матрицу A в единичную.

Итак, мы обосновали указанный способ нахождения матрицы X и тем самым доказали существование обратной матрицы A^{-1} для любой невырожденной матрицы A. Сформулируем отдельно способ нахождения матрицы A^{-1}.

3. Первый способ нахождения обратной матрицы

Пусть A – невырожденная матрица. Припишем к ней (*например, справа*) *единичную матрицу E. Далее с помощью элементарных преобразований над строками "сдвоенной" матрицы* (A | E) *приводим A* ("*левую половину*") *к единичной матрице E. Тогда на месте первоначально приписанной матрицы E окажется матрица A^{-1}.*

Заметим, что из самого способа нахождения матрицы A^{-1} легко следует, что *матрица*, *обратная для* A^{-1}, *есть* A. Действительно, проделав преобразования, переводящие A в E, в обратном порядке, из матрицы E получим A, а из A^{-1} – матрицу E. Это означает, что A есть обратная матрица для A^{-1}, т.е. $A^{-1}A = E$.

Пример 2.7. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

найти обратную матрицу A^{-1}.

Решение. Воспользуемся описанным выше способом нахождения A^{-1}. При этом нет необходимости специально проверять невырожденность матрицы A; это будет вытекать из самой возможности приведения A к E. Действительно, если элементарные преобразования, приводящие A к E, проделать в обратном порядке, то из матрицы E получим A. Но матрица E – невырожденная (очевидно); следовательно, и A – невырожденная.

Итак, составим матрицу

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований приведем ее левую "половину" A к матрице E:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

(закончен первый этап преобразований: первый столбец матрицы, стоящий левее вертикальной черты, принял вид первого столбца матрицы E);

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \to$$

(закончен второй этап преобразований);

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right).$$

Правее вертикальной черты получилась обратная матрица A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.8. Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

где X – неизвестная матрица 3×3.

Решение. Имеем

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 6 & 3 \\ -2 & -4 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -4 & 11 & -9 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -25 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -25 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Правее вертикальной черты получилась искомая матрица

$$X = \begin{pmatrix} -25 & -5 & -10 \\ 14 & 3 & 5 \\ -9 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Необходимое и достаточное условие невырожденности матрицы

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.6. *Квадратная матрица A невырождена тогда и только тогда, когда ее определитель $|A|$ не равен нулю.*

Доказательство. Пусть $|A| \neq 0,$ докажем, что A невырождена. Предположим, рассуждая от противного, что A – вырожденная матрица. Тогда между ее строками $\vec{a}_1,$ $\vec{a}_2, \ldots,$ $\vec{a}_n$ имеется линейная зависимость, т.е. одна из строк линейно выражается через другие.

Пусть, например,

$$\vec{a}_1 = 3\vec{a}_2 - 5\vec{a}_3.$$

Прибавив тогда к первой строке определителя вторую строку, умноженную на –3, и затем третью, умноженную на 5, получим определитель с первой строкой

$$\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 = \vec{0},$$

который равен нулю. Так как при указанных преобразованиях величина определителя не изменилась (см. свойство 6 определителей), имеем $|A| = 0,$ что противоречит условию. Итак, в одну сторону теорема доказана.

Пусть теперь матрица A невырождена, докажем, что $|A| \neq 0.$ Рассуждая от противного, допустим $|A| = 0.$ Как мы уже видели (см. доказательство теоремы 2.5), невырожденную матрицу с помощью элементарных преобразований над строками можно привести к единичной матрице E. В данном случае речь идет о следующих преобразованиях:

а) перестановка строк;

б) умножение строки на число $\lambda \neq 0;$

в) прибавление к одной из строк другой строки, умноженной на любое число.

Еще один вид элементарных преобразований, а именно вычеркивание нулевой строки, здесь невозможен (в невырожденной матрице не может быть нулевых строк). Рассмотрев каждое из преобразований а), б), в), нетрудно убедиться, что при любом из них определитель остается равным нулю. Следовательно, $|E| = 0$. Но это невозможно, так как определитель единичной матрицы равен 1. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Квадратная матрица A вырождена тогда и только тогда, когда ее определитель* $|A|$ *равен нулю.*

Следствие 2. *У вырожденной матрицы не существует обратной.*

Доказательство. Предположим, что вырожденная матрица A имеет обратную. Тогда

$$A^{-1}A = E.$$

Поэтому

$$\left|A^{-1}\right| \cdot |A| = 1.$$

Так как $|A| = 0,$ то мы приходим к противоречию, доказывающему наше утверждение.

5. Второй способ нахождения обратной матрицы

Мы уже располагаем некоторым способом нахождения обратной матрицы. Но можно указать и *формулу* для A^{-1}.

Для краткости рассмотрим матрицу A размера 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Составим новую матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij}, как и раньше, обозначает алгебраическое дополнение для элемента a_{ij} в определителе $|A|$. Матрицу A^* обычно называют *присоединенной* для A.

Теорема 2.7. *Если* $|A| \neq 0,$ *то матрица*

$$Q = \frac{1}{|A|}\left(A^*\right)^T \tag{2.32}$$

является обратной для A.

Доказательство. Необходимо проверить, что $AQ = E$. Имеем

$$AQ = \frac{1}{|A|} A\left(A^*\right)^T = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Произведение двух матриц, записанных справа, обозначим временно через C и покажем, что $C = |A| E$. Действительно, подсчитаем любой из диагональных элементов матрицы C, например, c_{11}:

$$c_{11} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}.$$

Полученная сумма дает разложение определителя $|A|$ по первой строке и потому $c_{11} = |A|$. В то же время любой “недиагональный” элемент матрицы C равен нулю. Например, c_{12}:

$$c_{12} = a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23},$$

но последняя сумма равна нулю на основании свойства 7 определителей. Итак, мы видим, что $C = |A| E$, следовательно,

$$AQ = \frac{1}{|A|}|A|E = E.$$

Теорема доказана.

Пример 2.9. Проверить, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной, и найти матрицу A^{-1}.

Решение. Приведем без комментариев соответствующие выкладки:

$$|A| = -1 \neq 0;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}; \ \left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Решение системы $n \times n$ с помощью обратной матрицы

Рассмотрим произвольную систему n линейных уравнений с n неизвестными, заданную в матричном виде

$$AX = B, \tag{2.33}$$

где A – матрица $n \times n$, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов.

Пусть матрица A является невырожденной. Умножим обе части уравнения (2.33) слева на матрицу A^{-1}. Получим

$$A^{-1}\left(AX\right) = A^{-1}B \ \Rightarrow \ \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B \ \Rightarrow \ EX = A^{-1}B,$$

или

$$X = A^{-1}B. \tag{2.34}$$

Формула (2.34) дает единственное решение системы (2.33) в случае невырожденной матрицы A.

Заметим, что полученный нами второй способ нахождения A^{-1} пригоден только при небольших значениях n (скажем, при $n = 2$ или 3). При $n > 3$ этот способ становится громоздким и трудноосуществимым. Тогда для нахождения A^{-1} применяется все тот же метод Гаусса.

Однако существует случай, когда формула (2.34) становится эффективной, а именно: если надо решать много систем уравнений с одной и той же матрицей системы, но с разными правыми частями, например, при рассмотрении модели Леонтьева (см. гл. 5).

7. Правило Крамера для системы $n \times n$

Для сокращения записей рассмотрим случай $n = 2$. Итак, пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

или в матричной записи:

$$AX = B, \tag{2.35}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что матрица A является невырожденной: $|A| \neq 0$. Тогда существует обратная матрица A^{-1}, равная

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

В этом случае для нахождения решения можем воспользоваться соотношением (2.34):

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\left(A_{11}b_1 + A_{21}b_2\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}\left(A_{21}b_1 + A_{22}b_2\right).$$

Полученные выражения для неизвестных допускают интересную интерпретацию. Рассмотрим наряду с матрицей A еще две матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

– каждая из них получается из A заменой соответствующего столбца столбцом B. Тогда будем иметь:

$$|A_1| = b_1 A_{11} + b_2 A_{22}$$

(разложение определителя $|A_1|$ по первому столбцу) и

$$|A_2| = b_1 A_{12} + b_2 A_{22}$$

(разложение по второму столбцу). Таким образом,

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|};\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}.$$

Написанные формулы носят название правила Крамера для системы 2 × 2. Аналогичным путем можно получить правило Крамера для системы $n \times n$. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8 (правило Крамера для системы $n \times n$). *Пусть дана система $AX = B$ из n линейных уравнений с n неизвестными. Если $|A| \neq 0$, то система имеет единственное решение*:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}, \tag{2.36}$$

где A_i означает матрицу, полученную из A заменой i-го столбца столбцом B ($i = 1, 2, ..., n$).

Правило Крамера имеет скорее теоретическое, чем практическое, значение, так как для нахождения x_1, ..., x_n требуется вычислить $n + 1$ определителей $|A|$, $|A_1|$, ..., $|A_n|$, что при достаточно больших n является громоздким делом.

Следствие. *Однородная система $n \times n$*

$$AX = 0$$

имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $|A| = 0$, *т.е. когда матрица A – вырожденная.*

Доказательство. Пусть система имеет ненулевое решение, докажем, что $|A| = 0$. Если бы это было не так, то по правилу Крамера система должна была бы иметь единственное решение $X = 0$, что противоречит условию.

Пусть $|A| = 0$. Тогда матрица A вырождена. Это означает, что ее ранг меньше n (числа неизвестных). Следовательно, система имеет ненулевое решение. Теорема доказана.

Пример 2.10. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + y + 4z = 107, \\ x + 4y + 3z = 94, \\ 4x + 3y + z = 103. \end{cases}$$

Решение. Вычислим главный определитель системы

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 12 + 12 - 64 - 1 - 27 = -56.$$

Так как $|A| \neq 0$, система имеет единственное решение. Найдем его по правилу Крамера.

Имеем

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 107 & 1 & 4 \\ 94 & 4 & 3 \\ 103 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -840, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 107 & 4 \\ 1 & 94 & 3 \\ 4 & 103 & 1 \end{vmatrix} = -560,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 107 \\ 1 & 4 & 94 \\ 4 & 3 & 103 \end{vmatrix} = -728.$$

Отсюда

$$x = \frac{-840}{-56} = 15; \quad y = \frac{-560}{-56} = 10; \quad z = \frac{-728}{-56} = 13.$$

§ 2.5. Преобразование координат вектора при замене базиса

В этом параграфе мы используем матричные обозначения для краткой записи формул, возникающих при переходе в векторном пространстве V от одного базиса к другому.

Пусть $\dim V = n$ и

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \tag{2.37}$$

– какой-либо базис в V. Каждый вектор $\vec{x}$ имеет в данном базисе координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n. \tag{2.38}$$

Часто возникает необходимость в переходе от данного базиса (2.37) к новому базису

$$\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'. \tag{2.39}$$

В новом базисе вектор $\vec{x}$ имеет некоторые координаты $x_1', x_2', \ldots, x_n'$:

$$\vec{x} = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' + \ldots + x_n'\vec{e}_n'. \tag{2.40}$$

Нас интересует вопрос: как связаны координаты вектора $\vec{x}$ в новом базисе (2.39) с координатами того же вектора в исходном базисе (2.37).

Для краткости рассмотрим случай $n = 3$. Каждый вектор нового базиса $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ допускает разложение по векторам исходного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_1' &= p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2 + p_{31}\vec{e}_3, \\
\vec{e}_2' &= p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2 + p_{32}\vec{e}_3, \\
\vec{e}_3' &= p_{13}\vec{e}_1 + p_{23}\vec{e}_2 + p_{33}\vec{e}_3.
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$
P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix},
$$

столбцы которой соответствуют разложению векторов $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$. Тогда формулы (2.41) можно записать в виде матричного равенства

$$
(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)P \tag{2.42}
$$

или, еще короче:

$$
B' = BP, \tag{2.43}
$$

где $B = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3)$, $B' = (\vec{e}_1' \quad \vec{e}_2' \quad \vec{e}_3')$ – матрицы-строки. Матрица P называется *матрицей перехода от базиса* (2.37) *к базису* (2.39).

Используя формулу (2.43), теперь нетрудно решить поставленную задачу. Для этого перепишем формулы (2.38) и (2.40) в матричном виде:

$$
\vec{x} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}. \tag{2.44}
$$

Воспользовавшись (2.43), теперь получим

$$
\vec{x} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)P\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}. \tag{2.45}
$$

Поскольку координаты вектора $\vec{x}$ определены однозначно, из равенства (2.45) имеем

$$X = PX', \tag{2.46}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ и } X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

– столбцы координат вектора $\vec{x}$ в исходном и новом базисах.

Подведем итог, причем сразу для любого n. Если формулы перехода от исходного базиса к новому базису имеют вид

$$B' = BP,$$

то формулы преобразования координат запишутся в виде матричного равенства

$$X = PX'. \tag{2.47}$$

Разумеется, можно записать и выражение новых координат через старые, разрешая уравнение (2.47) относительно X':

$$X' = P^{-1}X. \tag{2.48}$$

Матрица P^{-1} существует, поскольку матрица P невырожденная: ее столбцы соответствуют разложениям линейно независимых векторов $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а потому линейно независимы.

Пример 2.11. В пространстве $\mathbb{R}^2$ даны два базиса B и B', состоящие соответственно из векторов:

$$\vec{e}_1 = (1, 2), \vec{e}_2 = (2, 1);$$
$$e_1' = (11, 16), e_2' = (5, 7).$$

Найти матрицу перехода от базиса B к базису B' и определить координаты вектора $\vec{x} = (-4, 1)$ в базисах B и B'.

Р е ш е н и е. Матрицу перехода от базиса B к базису B' найдем, решив матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 16 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} P \tag{2.49}$$

в соответствии с (2.43). Из уравнения (2.49) получим

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 16 & 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 16 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\vec{x}$ в базисе найдем из равенства

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -16 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

Наконец, координаты вектора $\vec{x}$ в базисе B найдем, используя формулу (2.47):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Особый вид имеют формулы замены координат в случае, когда оба базиса B и B' *ортонормированные*. Сформулируем соответствующее утверждение.

Предложение. *Для ортонормированных базисов B и B' матрица перехода P является ортогональной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку оба базиса B и B' ортонормированные, выполняется равенство

$$B^T B = B'^T B' = E_n, \tag{2.50}$$

где E_n – единичная матрица порядка n. Применим операцию транспонирования к формуле (2.43) перехода к новому базису:

$$B'^T = P^T B^T.$$

Далее

$$B'^T B' = P^T B^T B P = P^T E_n P = P^T P,$$

так что согласно (2.50)

$$P^T P = E_n,$$

что доказывает утверждение.

ГЛАВА 3

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 3.1. Алгебраическая форма комплексного числа

1. Определение комплексного числа

Множество действительных чисел устроено «почти идеально» по отношению к большинству алгебраических операций. Сумма, разность, произведение и отношение действительных чисел является действительным числом. Однако существует одно исключение – извлечение квадратного корня определено лишь для положительных чисел. В результате у одних квадратных уравнений существует два корня, у других – один корень, у третьих – нет корней. Простейшее квадратное уравнение, неразрешимое в действительных числах, имеет вид

$$x^2+1=0. \tag{3.1}$$

Попытаемся встать на новую для себя точку зрения: будем считать, что уравнение (3.1) на самом деле разрешимо, но его корень не является действительным числом, а представляет собой какое-то новое число. Обозначим это число символом i. Итак, мы вводим новое число i, которому приписываем необычное свойство:

$$i^2=-1. \tag{3.2}$$

Или, другими словами,

$$i=\sqrt{-1}. \tag{3.3}$$

Теперь, помимо действительных чисел, обозначаемых, как обычно, a, b, c и т.д., у нас имеется новое число i. Назовем его *мнимой единицей*.

Будем считать, что мнимую единицу можно умножать и складывать с действительными числами. Получившиеся в результате числа, т.е. числа вида

$$z = a + bi, \tag{3.4}$$

где a и b – действительные числа, будем называть *комплексными числами*. При этом a называют *действительной частью*, а b – *мнимой частью*[1] комплексного числа z. Действительную часть комплексного числа z обозначают $\mathrm{Re}(z)$ (от французского слова reel – «действительный»), а мнимую – $\mathrm{Im}(z)$ (от imaginaire – «мнимый»). Например,

$$\mathrm{Re}\,(1 + 3i) = 1, \quad \mathrm{Im}\,(1 + 3i) = 3.$$

Если $\mathrm{Im}\,(z) = 0$, то число z – действительное; если $\mathrm{Re}\,(z) = 0$, то число z имеет вид bi и называется *мнимым.*

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой $\mathbb{C}$.

2. Операции над комплексными числами

Алгебраические операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел выполняются аналогично соответствующим операциям над многочленами. Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ – два комплексных числа. Тогда

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Таким образом, сумма и произведение комплексных чисел вычисляются соответственно по формулам:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \tag{3.5}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \tag{3.6}$$

---

[1] Иногда мнимой частью называют bi.

Так, например,

$$(5+3i)+(2-4i)=7-i,$$

$$(3+2i)(2+i)=4+7i.$$

Заметим, что частным случаем формулы (3.6) является следующее правило умножения действительного числа a_1 на комплексное число z_2

$$a_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i. \tag{3.7}$$

Операции сложения и умножения обладают следующими свойствами:

1) $z+w=w+z$;
2) $z \cdot w = w \cdot z$;
3) $(z+w)+v=z+(w+v)$;
4) $(z \cdot w)\cdot v = z\cdot(w\cdot v)$;
5) $(z+w)v = z\cdot v + w \cdot v$

для любых комплексных чисел z, w, v.

Определение. *Комплексное число* $a-bi$ *называется* ***сопряженным*** *с числом* $z=a+bi$.

Сопряженное число обозначается чертой сверху

$$\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi. \tag{3.8}$$

Очевидно, что $\bar{\bar{z}}=z$. Поэтому пару комплексных чисел z и $\bar{z}$ называют *взаимно сопряженными.*

Замечание 1. Комплексное число z, удовлетворяющее условию

$$\bar{z}=z, \tag{3.9}$$

является действительным, а условию

$$\bar{z}=-z \tag{3.10}$$

– мнимым.

Отметим, что сумма и произведение сопряженных комплексных чисел являются действительными числами, в самом деле

$$(a+bi)+(a-bi)=2a,\ (a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

Выполняются следующие свойства операции сопряжения:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2, \qquad (3.11)$$

$$\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2, \qquad (3.12)$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2. \qquad (3.13)$$

Замечание 2. Напомним, что корни квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

вычисляются по формулам

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \qquad (3.14)$$

где $D=b^2-4ac$. Если $D<0$, то формулы (3.14) можно записать так:

$$x_1=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{-D}}{2a}i; \qquad x_2=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{-D}}{2a}i. \qquad (3.15)$$

Таким образом, решением квадратного уравнения с действительными коэффициентами в случае, когда дискриминант меньше нуля, является пара взаимно сопряженных комплексных чисел. И, следовательно, на множестве комплексных чисел любое квадратное уравнение имеет решение.

Под частным $w=\dfrac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел z_1 и z_2, так же как и для действительных чисел, понимается такое комплексное число w, что

$$z_2\cdot w=z_1.$$

Умножая обе части этого равенства на сопряженное число $\bar{z}_2$, имеем

$$z_2\bar{z}_2\cdot w=z_1\bar{z}_2.$$

Число $z_2\bar{z}_2$, как отмечалось выше, является действительным. Умножая обе части последнего уравнения на число, обратное $z_2\bar{z}_2$ (правило умножения комплексного числа на действительное определяется формулой (3.7)), получим

$$w = \frac{1}{z_2\bar{z}_2} z_1\bar{z}_2 = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}. \tag{3.16}$$

Полагая $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i \quad (z_2 \neq 0)$, из (3.16) находим формулу для частного двух комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} i. \tag{3.17}$$

Замечание 3. Из (3.17) вытекает следующее свойство операции деления комплексных чисел

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \tag{3.18}$$

Пример 3.1. Вычислить $\dfrac{3-6i}{2+i}$.

Решение. Умножив числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное к знаменателю, имеем

$$\frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{3-3i}{4+1} = 0{,}6 - 0{,}6i.$$

§ 3.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

1. Геометрическое изображение комплексных чисел

Если для изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то изображениями комплексных чисел служат точки координатной плоскости.

Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy. Тогда каждому комплексному числу $z = a + bi$ будет отвечать точка с координатами (a, b). Эту точку чаще всего обозначают той же буквой z, что и само число; вместо слов «число z» говорят «точка z».

При таком способе изображения комплексных чисел любому действительному числу, т.е. числу вида $a + 0i$, отвечает точка $(a; 0)$, лежащая на оси Ox. При этом приходим к уже известному способу изображения действительных чисел точками числовой прямой x. В связи с этим ось Ox называют *действительной осью*. Комплексным же числам вида $0 + bi$ («мнимым») отвечают точки $(0; b)$ оси Oy; по этой причине ось Oy называют *мнимой осью*.

Плоскость, точки которой указанным выше образом интерпретируются как изображения комплексных чисел, называется *комплексной плоскостью*.

2. Модуль и аргумент комплексного числа

Наряду с интерпретацией комплексных чисел как точек плоскости применяется и другая – в виде векторов пространства $\mathbb{R}^2$ (векторов плоскости). Каждому комплексному числу $z = a + bi$ ставится в соответствие вектор $\vec{z} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

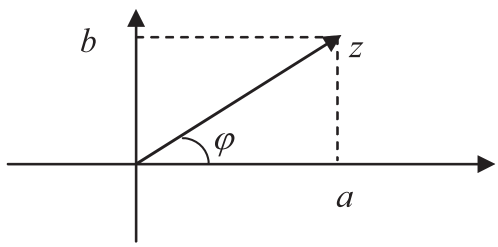

Рис. 3.1

Преимущество такой интерпретации заключается в том, что операции над векторами в $\mathbb{R}^2$ согласованы с операциями сложения комплексных чисел и умножения на действительное число. Действительно, пусть комплексным числам $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ соответствуют векторы $\vec{z}_1 = (a_1, b_1)$ и $\vec{z}_2 = (a_2, b_2)$. Тогда, как это следует из (3.5) и (3.7), сумме $z_1 + z_2$ будет соответствовать вектор

$(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$, а произведению $\vec{z}_1$ на действительное число a – вектор $(aa_1, ab_1) = a \cdot \vec{z}_1$.

Определение. *Длину вектора $\vec{z}$, соответствующего комплексному числу z, называют **модулем** этого числа z. Угол φ между вектором $\vec{z}$ и положительным направлением оси Ох называют **аргументом** комплексного числа z.*

Модуль комплексного числа z обозначают $|z|$, а аргумент – Arg z.

Если $z = 0$, то $|z| = 0$, а Arg z не определен.

Аргумент комплексного числа определен с точностью до $2\pi k$, $k \in Z$. Значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, обозначается arg z и называется *главным значением аргумента.*

Пусть $z = a + bi$ – отличное от нуля комплексное число. Из определения следует, что

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3.19}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \ \sin\varphi = \frac{b}{|z|}. \tag{3.20}$$

Замечание 4. Если z – действительное число, т.е. $z = a + 0 \cdot i$, то

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|.$$

Таким образом, понятие модуля комплексного числа является обобщением понятия модуля действительного числа.

Замечание 5. Число arg z также можно считать обобщением известного понятия, а именно понятия *знака действительного числа*. В самом деле, на действительной оси *Ox* из начала *O* выходят два луча, которые мы отмечаем знаками + и –. На комплексной же плоскости из начала координат можно провести не два, а бесчисленное множество лучей; чтобы различать эти лучи, мы приписываем каждому из них определенное значение угла $\varphi = \arg z$.

3. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть $z = a + bi$ – отличное от нуля комплексное число. Тогда из (3.20) вытекает, что

$$a = |z|\cos\varphi, b = |z|\sin\varphi.$$

Следовательно,

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3.21}$$

Такая форма записи комплексного числа называется *тригонометрической.*

Пример 3.2. Представить в тригонометрической форме число $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Решение. Вычислим модуль z: $|z| = \sqrt{1+3} = 2.$ Тогда

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Замечание 6. Из (3.21) следует, что

$$\bar{z} = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)). \tag{3.22}$$

Тригонометрическую форму удобно использовать для выполнения операций умножения и деления комплексных чисел.

Действительно, пусть

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

– комплексные числа, заданные в тригонометрической форме. Тогда, принимая во внимание (3.6), получим

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)).$$

Следовательно,

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{3.23}$$

Формула (3.23) дает правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме: *для умножения* z_1 *на* z_2 *модули этих чисел следует перемножить, а аргументы сложить.*

Используя метод математической индукции, можно распространить формулу (3.23) на любое число n сомножителей:

$$z_1 \cdot \ldots \cdot z_n = |z_1| \ldots |z_n| \left(\cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)\right). \quad (3.24)$$

Обратимся теперь к делению комплексных чисел. Пусть z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

причем $z_2 \neq 0$. Тогда из (3.16) на основании (3.22) и (3.23) получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right). \quad (3.25)$$

Таким образом, *для нахождения частного* $\frac{z_1}{z_2}$ *следует модуль числа* z_1 *разделить на модуль числа* z_2*, а из аргумента числа* z_1 *вычесть аргумент числа* z_2*.*

Чтобы вычислить n-ю степень комплексного числа z, положим в (3.24) $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, и тогда

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad (3.26)$$

или

$$\left[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (3.27)$$

Эта формула называется *формулой Муавра*.

Пример 3.3. Вычислить $\left(\frac{1}{i-1}\right)^{20}$.

Р е ш е н и е. Найдем тригонометрическую форму числа $z=\frac{1}{i-1}$.

Имеем

$$z=\frac{1}{i-1}=\frac{(i+1)}{(i-1)(i+1)}=\frac{i+1}{-2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Тогда по формуле Муавра находим

$$z^{20}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{20}\left(\cos\frac{100\pi}{4}+i\sin\frac{100\pi}{4}\right)=2^{-10}(\cos 25\pi+i\sin 25\pi)=-\frac{1}{1024}.$$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число u, такое, что

$$u^n=z. \tag{3.28}$$

Пусть

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq 0,\ u=|u|(\cos\mu+i\sin\mu).$$

Из условия (3.28), используя формулу Муавра, находим

$$|u|^n(\cos n\mu+i\sin n\mu)=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Отсюда следует, что

$$|u|^n=|z|,\ n\mu=\varphi+2\pi k,\ k\in Z.$$

Из первого равенства находим

$$|u|=\sqrt[n]{|z|},$$

из второго

$$\mu=\frac{\varphi+2\pi k}{n},\ k\in Z.$$

Таким образом, корни n-й степени вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \ k \in Z. \qquad (3.29)$$

Может показаться, что эта формула (3.29) дает бесчисленное множество значений $\sqrt[n]{z}$ (поскольку k – любое целое число). В действительности же, так как аргумент определен с точностью до $2\pi k,\ k \in Z,$ то для $\sqrt[n]{z}$ имеется ровно n различных значений, и чтобы получить эти значения, достаточно в правой части формулы (3.29) положить k равным 0, 1, 2, ..., $n - 1$.

Замечание 7. Из (3.29) следует, что точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и делят окружность на n равных частей.

Пример 3.4. Решить уравнение $x^6 = 64$.

Решение. У данного уравнения на множестве комплексных чисел существует 6 корней. Чтобы их найти, представим 64 в тригонометрической форме, имеем 64 = 64(cos 0 + i sin 0).

Тогда

$$x_k = \sqrt[6]{64}\left(\cos\left(\frac{0 + 2\pi k}{6}\right) + i\sin\left(\frac{0 + 2\pi k}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3}\right), k = 0, 1, \ldots, 5,$$

т. е.

$$x_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2,$$

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$x_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$x_3 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$

$$x_4 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - i\sqrt{3},$$

$$x_5 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

§ 3.3. Многочлены в комплексной области

1. Теорема о существовании корня

Напомним, что основной причиной введения комплексных чисел послужил тот факт, что не всякое квадратное уравнение можно решить, оставаясь в области действительных чисел. Комплексные числа полностью снимают эту трудность. Как было показано выше, любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами разрешимо в области комплексных чисел.

Естественно, возникает вопрос о разрешимости уравнений, степень которых выше, чем один, с любыми комплексными коэффициентами. Оказывается, что для решения таких уравнений также достаточно комплексных чисел. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3.1 (основная теорема алгебры комплексных чисел). *Уравнение*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0, \tag{3.30}$$

где n *– любое натуральное число и* $a_1, \ldots, a_n$ *– какие угодно комплексные числа, имеет хотя бы один комплексный корень.*

Доказательство этой теоремы приведено в приложении.

2. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители

Пусть

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \tag{3.31}$$

– многочлен степени n с комплексными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$ и старшим коэффициентом, равным 1. Согласно теореме 3.1 $f(z)$ имеет некоторый комплексный корень w_1. Как известно из курса алгебры, отсюда следует, что $f(z)$ делится без остатка на $z - w_1$, т.е.

$$f(z) = (z - w_1)\, f_1(z),$$

где $f_1(z)$ – многочлен степени $n - 1$ (со старшим коэффициентом 1). Применив такое же рассуждение к многочлену $f_1(z)$, получим

$$f_1(z) = (z - w_2)\, f_2(z),$$

и, следовательно,

$$f(z) = (z - w_1)\,(z - w_2)\, f_2(z),$$

где $f_2(z)$ – многочлен степени $n - 2$ (со старшим коэффициентом 1). Продолжая рассуждать так же, получим

$$f(z) = (z - w_1)\,(z - w_2)\,\ldots\,(z - w_n)\, f_n(z),$$

где $f_n(z)$ – многочлен степени 0 со старшим коэффициентом 1, т.е. $f_n(z) = 1$. Итак,

$$f(z) = (z - w_1)\,(z - w_2)\,\ldots\,(z - w_n). \tag{3.32}$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.2. *Многочлен $f(z)$ степени n с комплексными коэффициентами и со старшим коэффициентом, равным* 1, *разлагается в произведение n множителей вида $z - w$.*

Замечание 8. В случае, когда старший коэффициент многочлена $f(z)$ равен какому-то числу a (не равному 1), имеем

$$f(z) = a(z - w_1)\,(z - w_2)\,\ldots\,(z - w_n). \tag{3.33}$$

Теорема 3.3. *Представление многочлена $f(z)$ в виде произведения* (3.31) *единственно с точностью до перестановки сомножителей.*

Доказательство. Пусть имеет место равенство

$$(z - w_1)\,(z - w_2)\,\ldots\,(z - w_n) = (z - v_1)\,(z - v_2)\,\ldots\,(z - v_n). \tag{3.34}$$

При $z = w_1$ левая часть (3.34) обращается в нуль; следовательно, равна нулю и правая часть. Это означает, что какое-то из чисел v_1, v_2, …, v_n равно w_1. Пусть, например, $w_1 = v_1$. Сокращая обе части равенства (3.34) на $z - v_1$, получим

$$(z - w_2)\,\ldots\,(z - w_n) = (z - v_2)\,\ldots\,(z - v_n).$$

Далее точно так же докажем, что w_2 равно одному из чисел v_2, …, v_n и т.д. Продолжая это рассуждение, заключаем, что набор чисел w_1, w_2, …, w_n лишь порядком отличается от набора чисел v_1, v_2, …, v_n.

Каждое из чисел w_1, w_2, ..., w_n в равенстве (3.33) является, очевидно, корнем многочлена $f(z)$. Обратно, любой корень $f(z)$ совпадает с одним из чисел w_1, w_2, ..., w_n в равенстве (3.33). Действительно, если w – корень $f(z)$, то при $z = w$ из равенства (3.34) следует

$$0 = (w - w_1)(w - w_2)\dots(w - w_n),$$

т.е. число w равно одному из чисел w_1, w_2, ..., w_n.

3. Сумма кратностей всех корней многочлена

В разложении (3.33) некоторые из множителей могут оказаться одинаковыми. Произведение одинаковых множителей $z - w_i$ можно записать в виде степени $(z - w_i)^k$. В результате приходим к равенству вида

$$f(z) = (z - v_1)^{k_1}(z - v_2)^{k_2}\dots(z - v_s)^{k_s}, \tag{3.35}$$

где числа v_1, v_2, ..., v_s попарно различны. При этом, разумеется, выполняется равенство

$$k_1 + k_2 + \dots + k_s = n, \tag{3.36}$$

поскольку число всех множителей в правой части соотношения (3.35) равно n.

Определение. *Корень w многочлена $f(z)$ называется* ***корнем кратности*** *k, если $f(z)$ делится* на $(z - w)^k$, *но не делится* на $(z - w)^{k+1}$.

Согласно этому определению равенство (3.35) означает, что, например, кратность корня v_1 равна k_1. Действительно, как показывает это равенство, $f(z)$ делится на $(z - v_1)^{k_1}$, а многочлен

$$\frac{f(z)}{(z - v_1)^{k_1}} = (z - v_2)^{k_2}\dots(z - v_s)^{k_s}$$

уже не делится на $(z - v_1)^{k_1+1}$ (в противном случае этот многочлен при $z = v_1$ обращался бы в нуль, а это противоречит тому, что $v_1 \neq v_2, \dots, v_1 \neq v_s$).

Равенство (3.36) может быть теперь «прочитано» следующим образом: сумма кратностей всех корней многочлена равна степени многочлена. Обычно это утверждение формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 3.4. *Число комплексных корней многочлена $f(z)$ равно степени этого многочлена, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Например, многочлен $f(z)=(z-1)^3(z+1)$, степень которого равна 4, имеет корень 1 кратности три и –1 кратности один.

4. Многочлены с действительными коэффициентами

Лемма. *Пусть $f(z)$ – многочлен с действительными коэффициентами. Тогда справедливо следующее равенство*:

$$f(\bar{z})=\overline{f(z)}. \tag{3.37}$$

Доказательство. Пусть $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$. Так как коэффициенты $a_0,a_1,\cdots,a_n$ являются действительными числами, то

$$\bar{a}_0=a_0,\ \bar{a}_1=a_1,\cdots,\ \bar{a}_n=a_n.$$

Учитывая это, на основании свойств сопряженных чисел (3.11) , (3.13) получим

$$f(\bar{z})=a_0\bar{z}^n+a_1\bar{z}^{n-1}+\cdots a_{n-1}\bar{z}+a_n=\bar{a}_0\bar{z}^n+\bar{a}_1\bar{z}^{n-1}+\cdots+\bar{a}_{n-1}\bar{z}+\bar{a}_n=$$

$$=\overline{a_0z^n}+\overline{a_1z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}z}+\overline{a_n}=\overline{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}=\overline{f(z)}.$$

Лемма доказана.

Как отмечалось выше, если дискриминант квадратного трехчлена с действительными коэффициентами меньше нуля, то его решением является пара комплексно сопряженных чисел. Оказывается, что это утверждение может быть обобщено на случай многочленов произвольной степени.

Непосредственно из данной леммы вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Если комплексное число w является корнем многочлена f(z) с действительными коэффициентами, то сопряженное число* $\overline{w}$ *также является корнем этого многочлена.*

Доказательство. Пусть w – корень многочлена $f(z)$, т.е. $f(w) = 0$. Тогда из (3.37) имеем

$$f(\overline{w}) = \overline{f(w)} = 0.$$

Следствие. *Если комплексное число* $w = a + bi$ $(b \neq 0)$ *является корнем многочлена f(z) с действительными коэффициентами, то этот многочлен делится нацело на квадратный трехчлен*

$$z^2 - 2az + a^2 + b^2,$$

также имеющий действительные коэффициенты.

Доказательство. Пусть многочлен $f(z)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $w = a + bi$ $(b \neq 0)$, тогда он нацело делится на $z - w$. Согласно теореме 3.5 он также имеет корень $\overline{w}$, а значит, делится нацело на $z - \overline{w}$. Следовательно, $f(z)$ делится без остатка на многочлен

$$(z - w)(z - \overline{w}) = z^2 - 2az + a^2 + b^2. \qquad (3.38)$$

Итак, если у многочлена $f(z)$ с действительными коэффициентами существует действительный корень v, то он делится нацело на линейный множитель $z - v$, а если комплексный корень $w = a + bi$ $(b \neq 0)$, то – на квадратный трехчлен вида (3.38).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.6. *Любой многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами. Это разложение может быть выбрано так, чтобы каждый множитель второй степени не имел действительных корней.*

Например, многочлен $z^4 + z^2 - 2$ имеет следующее разложение:

$$z^4 + z^2 - 2 = (z - 1)(z + 1)(z^2 + 2).$$

Пример 3.5. Найти многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий корни $2+i$ и 1.

Решение. Пусть $f(z)$ – искомый многочлен. Тогда среди его корней обязательно должны быть числа $2+i$, $2-i$, 1. Это означает, что в разложение многочлена $f(z)$ на множители первой степени должно входить произведение

$$(z-(2+i))(z-(2-i))(z-1).$$

Но произведение двух первых сомножителей

$$(z-(2-i))(z-(2+i)) = z^2-4z+5$$

есть многочлен с действительными коэффициентами. Таким образом, $f(z)$ должен делиться на многочлен

$$(z^2-4z+5)(z-1) = z^3-5z^2+9z-5.$$

Отсюда следует, что многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий поставленному условию, есть $c(z^3-5z^2+9z-5)$, где c – любое не равное нулю действительное число.

ГЛАВА 4

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 4.1. Линейные преобразования и матрицы

1. Определение линейного преобразования. Примеры

Пусть V – линейное пространство. Если указано правило, по которому каждому вектору $\vec{x}$ из V ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y}$ из V, то будем говорить, что задано *отображение пространства V в себя*, или *преобразование пространства V*.

Определение. *Отображение f линейного пространства V в себя называется* ***линейным преобразованием*** (***линейным оператором***), *если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V$ и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства*

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \tag{4.1}$$

$$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}). \tag{4.2}$$

Замечание. Из условий (4.1) и (4.2) следует, что действие линейного преобразования f на линейную комбинацию нескольких векторов подчиняется формуле

$$f(\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{x}_k) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + \lambda_k f(\vec{x}_k), \tag{4.3}$$

а также

$$f(\vec{0}) = f(0\cdot\vec{x}) = 0\cdot f(\vec{x}) = \vec{0}. \tag{4.4}$$

Приведем некоторые примеры линейных преобразований.

1. Преобразование f линейного пространства V, определенное формулой

$$f(\vec{x}) = \vec{0} \tag{4.5}$$

для любого $\vec{x}$ из V, является, очевидно, линейным. Оно называется *нулевым преобразованием*.

2. Преобразование f линейного пространства V, заданное формулой

$$f(\vec{x}) = \vec{x} \tag{4.6}$$

для любого $\vec{x}$ из V, также является линейным. Оно называется *тождественным преобразованием* пространства V.

3. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – фиксированный базис линейного пространства V и

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 x_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

– разложение произвольного вектора $\vec{x}$ по базису. Положим

$$f(\vec{x}) = x_1\vec{e}_1. \tag{4.7}$$

Полученное преобразование является линейным (проверьте!). Его называют *проектированием* на одномерное подпространство, порожденное вектором $\vec{e}_1$. Разумеется, это преобразование не определяется полностью выбором вектора $\vec{e}_1$, а зависит еще и от выбора векторов $\vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, дополняющих $\vec{e}_1$ до базиса пространства.

Аналогичным образом можно определить проектирование на двумерное подпространство, порожденное векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$:

$$f(\vec{x}) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \tag{4.8}$$

и т.д.

4. Ранее отмечалось, что множество всех многочленов от переменной z является линейным пространством. Поставив в соответствие каждому многочлену

$$g(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

его производную, т.е. многочлен

$$g'(z) = na_0 z^{n-1} + (n-1)a_1 z^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}z + a_{n-1},$$

мы получим линейное преобразование пространства всех многочленов.

Определение. *Подмножество векторов линейного пространства V таких, что $f(\vec{x}) = 0$, называется **ядром** линейного преобразования f и обозначается* **Ker *f***. *Область значений линейного преобразования f называется его **образом** и обозначается* **Im *f***.

Другими словами, вектор $\vec{y}$ принадлежит Im *f*, если существует такой вектор $\vec{x}$ из *V*, что

$$\vec{y} = f(\vec{x}). \tag{4.9}$$

Например, образом тождественного преобразования линейного пространства *V* является само *V*, а его ядро состоит только лишь из одного нулевого вектора. Для нулевого преобразования все наоборот: ядром является само *V*, а образ состоит лишь из одного нулевого вектора. Ядром линейного преобразования, определенного соотношением (4.7), является линейная оболочка $L(\vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, а образом – $L(\vec{e}_1)$.

Замечание. Образ и ядро линейного преобразования *f* являются подпространствами линейного пространства V (проверьте!).

2. Матрица линейного преобразования

Начиная с этого места, мы будем все время предполагать, что линейное пространство имеет размерность, равную *n*. Это предположение позволяет свести изучение линейных преобразований к изучению квадратных матриц порядка *n*.

Выберем в пространстве V некоторый базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$. Пусть f – линейное преобразование пространства *V*. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x}$ и его образ $\vec{y} = f(\vec{x})$. Разложив эти векторы по базису, имеем

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n, \tag{4.10}$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n. \qquad (4.11)$$

Наша цель – найти выражения для $y_1, y_2, ..., y_n$ через $x_1, x_2, ..., x_n$.

Из равенства (4.10) ввиду линейности отображения f следует равенство

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n). \qquad (4.12)$$

Векторы $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \cdots, f(\vec{e}_n)$ также допускают разложение по базису

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n, \\ f(\vec{e}_2) &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n, \\ &. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ f(\vec{e}_n) &= a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n. \end{aligned} \qquad (4.13)$$

Если в равенстве (4.12) вместо векторов $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)$ подставить их разложения из (4.13), получим

$$f(\vec{x}) = x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + ... + a_{n1}\vec{e}_n) + ... + x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + ... + a_{nn}\vec{e}_n),$$

или

$$\vec{y} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_{21} + ... + a_{1n}x_n)\vec{e}_1 + ... + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_{21} + ... + a_{nn}x_n)\vec{e}_n. \qquad (4.14)$$

Сравнивая это представление вектора $\vec{y}$ с (4.11), приходим к искомым формулам:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ &. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n. \end{aligned} \qquad (4.15)$$

Говорят, что формулы (4.15) дают *запись линейного преобразования в координатах.*

Если ввести в рассмотрение матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (4.16)$$

а также матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

то формулы (4.15) можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

или сокращенно, в виде матричного равенства

$$Y = AX. \tag{4.17}$$

Матрица A называется *матрицей линейного преобразования f* в данном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$.

Пример 4.1. Пусть N – фиксированное натуральное число и L_N – линейное пространство всех многочленов степени не выше N, т.е. многочленов вида

$$g(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_{N-1} z + a_N.$$

Выбрав в L_N базис из многочленов $\{z^N, z^{N-1}, \ldots, z, 1\}$, можно рассматривать L_N как векторное пространство размерности $N + 1$; координатами вектора $g(z) \in L_N$ в указанном базисе являются как раз коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N$ многочлена $g(z)$.

Рассмотрим линейное преобразование f пространства L_N, ставящее в соответствие многочлену $g(z)$ его производную $g'(z)$, т.е. вектор

$$g'(z) = Na_0 z^{N-1} + (N-1)a_1 z^{N-2} + \ldots + 2a_{N-2} z + a_{N-1}.$$

В базисе $\{z^N, z^{N-1}, \ldots, z, 1\}$ вектор $g'(z)$ имеет координаты

$$b_0 = 0, b_1 = Na_0, b_2 = (N-1)a_1, \ldots, b_{N-1} = 2a_{N-2}, b_N = a_{N-1}.$$

Следовательно, матрица A порядка N преобразования f в указанном базисе имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ N & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N-1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису

Пусть A – матрица линейного преобразования f в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$. Предположим, что от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ в пространстве V мы переходим к новому базису $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'\}$. В новом базисе преобразованию f отвечает новая матрица A'. Возникает вопрос, как связаны между собой матрицы A и A'? Мы покажем, что справедлива формула

$$A' = T^{-1}AT, \tag{4.18}$$

где

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

есть матрица перехода от исходного базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ к новому базису $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'\}$.

Для доказательства формулы (4.19) разложим произвольный вектор $\vec{x}$ по базисам $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ и $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'\}$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n, \tag{4.20}$$

$$\vec{x} = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' + \ldots + x_n'\vec{e}_n'. \tag{4.21}$$

Мы знаем, что между старыми и новыми координатами вектора существует следующая связь:

$$X = TX', \tag{4.22}$$

где X обозначает столбец из старых, а X' – столбец из новых координат:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Точно такая же связь имеется между старыми и новыми координатами вектора $\vec{y} = f(\vec{x})$:

$$Y = TY'. \tag{4.24}$$

Пользуясь соотношениями (4.17), (4.22) и (4.24), установим теперь связь между X' и Y'. Учитывая невырожденность матрицы перехода T, получаем последовательно:

$$Y' = T^{-1}Y = T^{-1}AX = T^{-1}ATX'.$$

Отсюда следует, что матрицей отображения A в базисе $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'\}$ будет матрица $A' = T^{-1}AT$, что и требовалось доказать.

Определение. *Матрица B называется* ***подобной*** *матрице C, если существует такая невырожденная матрица T, что выполняется равенство*

$$B = T^{-1}CT. \tag{4.25}$$

Если матрица B подобна матрице C, то и матрица C подобна матрице B, так как из последнего равенства вытекает равенство

$$C = S^{-1}BS,$$

где $S = T^{-1}$. Другими словами, отношение подобия является симметричным. Поэтому можно говорить просто о двух *подобных матрицах* B и C.

Из формулы (4.18) мы можем теперь вывести такое заключение: *матрицы, отвечающие данному линейному преобразованию в двух различных базисах, подобны друг другу*.

§ 4.2. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

1. Модель международной торговли

Изучение вопроса о собственных векторах и собственных значениях линейного преобразования начнем с рассмотрения модели международной торговли (кратко: модель обмена). Данная модель дает ответ на следующий вопрос: какими должны быть соотношения между государственными бюджетами стран, торгующих между собой, чтобы торговля была взаимовыгодной, т.е. не было значительного дефицита торгового баланса для каждой из стран-участниц? Проблема достаточно важна, так как дефицит в торговле между странами порождает такие явления как лицензии, квоты, таможенные пошлины и даже торговые войны.

Для простоты изложения рассмотрим три страны-участницы торговли с государственными бюджетами X_1, X_2, X_3, которые условно назовем США, Германия и Кувейт. Будем считать, что весь госбюджет каждой страны тратится на закупки товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран. Пусть, скажем, США тратят половину своего бюджета на закупку товаров внутри страны, 1/4 бюджета – на товары из Германии, оставшиеся 1/4 бюджета – на товары из Кувейта. Германия тратит поровну свой бюджет на закупку товаров в США, внутри страны и у Кувейта. Кувейт, в свою очередь, тратит 1/2 бюджета на закупку товаров у США, 1/2 бюджета на закупки в Германии и ничего не закупает внутри страны.

Введем структурную матрицу торговли:

$$
\begin{array}{c}
\qquad\quad \text{США} \quad \text{Германия} \qquad \text{Кувейт} \\
A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Заметим, что сумма элементов матрицы A в каждом столбце равна единице.

Вообще, пусть a_{ij} – часть госбюджета, которую j-я страна тратит на закупки товаров i-й страны. После подведения итогов торговли за год страна под номером i получит выручку $p_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3$. Например, США получат выручку

$$
p_1 = \underbrace{\frac{1}{2}X_1}_{\text{доля США}} + \underbrace{\frac{1}{3}X_2}_{\text{доля Германии}} + \underbrace{\frac{1}{2}X_3}_{\text{доля Кувейта}}.
$$

Для того чтобы торговля была сбалансированной, необходимо потребовать бездефицитность торговли для каждой страны:

$$
p_i \geq X_i \text{ для всех } i. \tag{4.26}
$$

Предложение. *Условием бездефицитной торговли являются равенства*

$$
p_i = X_i,\ i = 1, 2, 3.
$$

Доказательство. Предположим, что $p_i > X_i$ для некоторого i, например для $i = 1$. Запишем условие (4.26) для всех i:

$$
\begin{gathered}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 > X_1; \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \geq X_2; \\
a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \geq X_3.
\end{gathered}
$$

Сложив все эти неравенства, имеем:

$$(a_{11} + a_{21} + a_{31})X_1 + (a_{12} + a_{22} + a_{32})X_2 + (a_{13} + a_{23} + a_{33})X_3 >$$
$$> X_1 + X_2 + X_3.$$

Поскольку все суммы в скобках в левой части неравенства равны 1, то получим противоречивое неравенство

$$X_1 + X_2 + X_3 > X_1 + X_2 + X_3.$$

Следовательно, наше предположение о том, что $p_1 > X_1$, неверно. Доказательство завершено.

В матричной форме утверждение, содержащееся в предложении, выглядит следующим образом:

$$AX = X, \tag{4.27}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (X_1, X_2, X_3)^T.$$

2. Определения и примеры

Определение. *Ненулевой вектор $\vec{x}$ линейного пространства V называется* ***собственным вектором*** *линейного преобразования f, если выполняется равенство*

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}, \tag{4.28}$$

где λ – некоторое число. При этом число λ называется ***собственным значением*** *линейного преобразования f. Говорят также, что $\vec{x}$ есть собственный вектор, принадлежащий собственному значению λ.*

Замечание. Соотношение (4.28) может быть истолковано следующим образом: вектор $\vec{x}$ является собственным вектором линейного преобразования f, если под действием f вектор $\vec{x}$ преобразуется в коллинеарный вектор.

Замечание. Если вектор $\vec{x}$ является собственным вектором линейного преобразования f, принадлежащим собственному значению λ, то для любого числа $k \neq 0$ вектор $k\vec{x}$ – тоже собственный вектор f, принадлежащий λ.

Действительно, если $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, то

$$f(k\vec{x}) = kf(\vec{x}) = k(\lambda\vec{x}) = \lambda(k\vec{x}).$$

Аналогично, если $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ – два собственных вектора, принадлежащие собственному значению λ, то и ненулевой вектор $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ – собственный вектор, отвечающий тому же собственному значению. Доказательство оставляется читателю.

Таким образом, множество всех собственных векторов, принадлежащих одному собственному значению, к которому добавили нулевой вектор, образует линейное подпространство V.

Пусть A – матрица линейного преобразования f в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ и X – матрица-столбец из координат вектора $\vec{x}$, тогда соотношение (4.28) может быть записано в равносильной форме

$$AX = \lambda X. \tag{4.29}$$

Поэтому также принято говорить, что *ненулевая матрица-столбец X является собственным вектором квадратной матрицы A, соответствующим собственному значению λ.*

Таким образом, в рассмотренной выше модели международной торговли из соотношения (4.27) следует, что “вектор бюджетов” X является собственным вектором структурной матрицы торговли A, а соответствующее собственное значение равно 1. Существование такого собственного вектора вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Если в матрице A сумма элементов каждого столбца равна* 1, *то имеется собственный вектор, принадлежащий собственному значению* 1.

Доказательство. Рассмотрим случай матрицы 3 × 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ A - E = \begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-1 \end{pmatrix}.$$

По условию

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} = 1,$$
$$a_{12} + a_{22} + a_{32} = 1,$$
$$a_{13} + a_{23} + a_{33} = 1,$$

откуда следует, что

$$a_{11} - 1 + a_{21} + a_{31} = 0,$$
$$a_{12} + a_{22} - 1 + a_{32} = 0,$$
$$a_{13} + a_{23} + a_{33} - 1 = 0.$$

Эти соотношения показывают, что сумма строк матрицы $A - E$ равна нулевому вектору, т.е. матрица $A - E$ вырожденная. Следовательно, система уравнений

$$(A - E)\,\vec{x} = 0$$

имеет ненулевое решение $\vec{x} = \vec{x}_0$. Это означает, что $\vec{x}_0$ – собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$.

Пример 4.2. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Положим $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$ (вектор-столбец). Тогда из соотношения (4.29) следует, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \lambda x_1, \\ -x_1 + 4x_2 = \lambda x_2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \\ -x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0. \end{cases} \tag{4.30}$$

Если вектор $\vec{x}$ – собственный, то это означает, что данная однородная система уравнений имеет ненулевое решение. Это условие эквивалентно тому, что определитель системы (4.30) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Таким образом, собственными значениями матрицы A будут числа 2 и 3.

Найдем соответствующие собственные векторы. Подставим $\lambda = 2$ и $\lambda = 3$ в систему (4.30):

$$\lambda = 2, \qquad\qquad \lambda = 3,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

$$x_1 = 2t,\ x_2 = t, \qquad\qquad x_1 = t,\ x_2 = t,$$

$$\vec{x} = t\,(2,\ 1),\ t \neq 0, \qquad\qquad \vec{x} = t\,(1,\ 1),\ t \neq 0.$$

3. Характеристическое уравнение

Рассуждения из примера 4.2 можно обобщить на случай произвольной матрицы A порядка n. Условие (4.29) можно переписать в виде

$$AX - \lambda X = 0$$

или

$$(A - \lambda E)X = 0. \tag{4.31}$$

Однородная система уравнений (4.31) тогда и только тогда имеет ненулевое решение X, когда ее определитель равен нулю:

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{4.32}$$

Если раскрыть данный определитель, как в рассмотренном примере, то получится многочлен степени n относительно λ, называемый *характеристическим многочленом* матрицы A.

Определение. *Уравнение*

$$|A-\lambda E|=0$$

называется ***характеристическим уравнением*** *матрицы A*.

Таким образом, *собственные значения матрицы A являются корнями ее характеристического уравнения.*

Предложение. *Собственные значения матриц A и A^T совпадают.*

Действительно, используя свойства определителей и операции транспонирования, имеем

$$\left|A^T-\lambda E\right|=\left|A^T-(\lambda E)^T\right|=\left|(A-\lambda E)^T\right|=|A-\lambda E|=0.$$

Таким образом, характеристические уравнения матриц A и A^T совпадают, следовательно, их собственные значения равны.

Предложение. *Собственные значения подобных матриц совпадают*.

Рекомендуем читателю убедиться в справедливости этого утверждения самостоятельно.

Замечание. Одному собственному значению может соответствовать несколько линейно независимых собственных векторов.

Пример 4.3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

или $(3-\lambda)^3=0$. Следовательно, $\lambda=3$ – единственное собственное значение матрицы A. Система уравнений (4.32) для отыскания собственных векторов сводится к единственному уравнению

$$x_1 + x_2 = 0,$$

или $x_1 = -x_2$. Положим $x_2 = a$, $x_3 = b$ и получим общее решение системы (4.32)

$$x_1 = -a,\ x_2 = a,\ x_3 = b,$$

т.е. собственный вектор $\vec{x} = (-a,\ a,\ b)$ представляется в виде линейной комбинации

$$\vec{x} = a(-1;\ 1;\ 0) + b(0;\ 0;1)$$

двух линейно независимых векторов $\vec{a}_1 = (-1;\ 1;\ 0)$ и $\vec{a}_2 = (0;\ 0;\ 1)$.

Вернемся к отысканию собственного вектора X в модели международной торговли. Система уравнений для нахождения X имеет вид (4.27), т.е.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = 0 .$$

Нетрудно найти общее решение этой системы:

$$\begin{cases} X_1 = 2X_3, \\ X_2 = \frac{3}{2} X_3, \end{cases}$$

поэтому в качестве собственного вектора можно взять вектор

$$X = (4;\ 3;\ 2).$$

В частности, это означает, что сбалансированность торговли этих трех стран может быть достигнута только в том случае, когда госбюджеты находятся в отношении

$$X_1 : X_2 : X_3 = 4 : 3 : 2.$$

§ 4.3. Симметрические линейные преобразования

1. Основные определения

Пусть f – линейное преобразование евклидова пространства V.

Определение. *Преобразование* f^* *называется* ***сопряженным*** *по отношению к* f*, если для любых векторов* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *справедливо равенство*

$$(f(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, f^*(\vec{y})), \qquad (4.33)$$

где $(\vec{x}, \vec{y})$, *как и ранее, обозначает скалярное произведение векторов* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$.

Выберем в пространстве V какой-нибудь ортонормированный базис, и пусть в этом базисе преобразованию f отвечает матрица A. Покажем, что *преобразованию* f^* *будет отвечать в том же базисе матрица* A^T.

Принимая во внимание, что в ортонормированном базисе скалярное произведение выражается формулой

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

или, в матричном виде

$$(\vec{x}, \vec{y}) = X^T Y,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

получим, что справедливость данного утверждения следует из очевидного равенства

$$(AX)^T Y = X^T (A^T Y).$$

Определение. *Линейное преобразование f называется **симметрическим**, если оно совпадает со своим сопряженным преобразованием* f^*, *т.е. если справедливо равенство*

$$(f(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, f(\vec{y})). \tag{4.34}$$

Из сказанного выше тотчас вытекает такое следствие.

В любом ортонормированном базисе матрица A симметрического преобразования f является симметрической матрицей, т.е.

$$A^T = A. \tag{4.35}$$

2. Собственные векторы и собственные значения симметрического линейного преобразования

Установим теперь другое важное свойство симметрического преобразования. Сформулируем это свойство в терминах матриц.

Теорема 4.2. *Характеристическое уравнение симметрической матрицы A имеет только действительные корни.*

Иначе говоря, если $a + bi$ есть какой-либо комплексный корень характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0, \tag{4.36}$$

то обязательно $b = 0$. Поскольку λ есть корень уравнения, то система однородных уравнений

$$(A - \lambda E)X = 0$$

имеет ненулевое решение X. Разумеется, координаты вектора X – комплексные числа (вслед за λ). Условимся обозначать через $\overline{X}$ – вектор, координаты которого являются сопряженными числами по отношению к координатам вектора X. Имеем

$$\overline{(AX)} = \overline{(\lambda X)} = \overline{\lambda}\overline{X},$$

а также

$$\overline{A}\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X}$$

(мы воспользовались свойствами операции сопряжения комплексных чисел: $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ и $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}$). Поскольку все элементы матрицы A – действительные числа, то $\overline{A}=A$, следовательно,

$$A\overline{X}=\overline{\lambda}\overline{X}.$$

Теперь можем записать

$$(AX)^T\,\overline{X}=(\lambda X)^T\,\overline{X}=\lambda(X^T\,\overline{X}),$$

$$(AX)^T\,\overline{X}=X^T A^T\,\overline{X}=X^T\,\overline{\lambda}\overline{X}=\overline{\lambda}\,(X^T\,\overline{X}),$$

и поскольку $(X^T\,\overline{X})\neq 0$ (вектор X – ненулевой, поэтому $X^T\,\overline{X}=x_1\overline{x}_1+\ldots+x_n\overline{x}_n>0$), то

$$\overline{\lambda}=\lambda,$$

т.е. λ – действительное число.

Сформулируем теперь теорему, выражающую наиболее важное свойство симметрических отображений.

Теорема 4.3. *Для симметрического линейного преобразования f в евклидовом пространстве V существует ортогональный базис, состоящий из собственных векторов этого преобразования. В этом базисе матрица преобразования имеет вид*

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}, \qquad (4.37)$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ – собственные значения отображения f.

Доказательство. Будем вести индукцию по n. В случае $n = 1$ любое линейное преобразование имеет вид

$$f(\vec{x})=k\vec{x}\ \ (k = \text{const}).$$

Поэтому любой ненулевой вектор $\vec{x}$ является собственным, и доказывать нечего.

Предположим, что утверждение теоремы верно для симметрических преобразований в евклидовом пространстве размерности $n-1$, и в этом предположении докажем его для евклидова пространства размерности n.

Прежде всего возьмем какое-либо собственное значение λ_1 симметрического преобразования f. По доказанному ранее, λ_1 – действительное число. Пусть $\vec{a}_1$ – соответствующий собственный вектор

$$f(\vec{a}_1) = \lambda_1 \vec{a}_1.$$

Обозначим через S – множество всех векторов $\vec{x} \in V$, ортогональных к $\vec{a}_1$:

$$(\vec{a}_1, \vec{x}) = 0.$$

Так как подпространство S есть ортогональное дополнение к линейной оболочке $L(\vec{a}_1)$, его размерность равна $n-1$. Покажем, что это подпространство выдерживает действие f. Это означает, что если $\vec{x} \in S$, то $f(\vec{x}) \in S$. Действительно,

$$\vec{x} \in S \Rightarrow (\vec{a}_1, \vec{x}) = 0 \Rightarrow (\lambda_1 \vec{a}_1, \vec{x}) = 0 \Rightarrow (f(\vec{a}_1), \vec{x}) = \left(\vec{a}_1, f(\vec{x})\right) = 0.$$

Из сказанного следует, что действие f на всем пространстве V можно при желании сузить до действия f на подпространстве S. Применяя предположение индукции, получим, что в S существует ортогональный базис $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, состоящий из собственных векторов преобразования, т.е.

$$f(\vec{a}_2) = \lambda_2 \vec{a}_2, \cdots, f(\vec{a}_n) = \lambda_n \vec{a}_n.$$

Вместе с равенством $f(\vec{a}_1) = \lambda_1 \vec{a}_1$ это доказывает первую часть теоремы.

Если $\vec{x}$ – произвольный вектор и

$$\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \ldots + x_n \vec{a}_n$$

– его разложение по базису $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$, то

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{a}_1) + x_2 f(\vec{a}_2) + \ldots + x_n f(\vec{a}_n) = \lambda_1 x_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 x_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n x_n \vec{a}_n,$$

поэтому для координат $y_1, \ldots, y_n$ вектора $\vec{y} = f(\vec{x})$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_1 x_1, \\ y_2 &= \lambda_2 x_2, \\ &\ldots\ldots \\ y_n &= \lambda_n x_n. \end{aligned}$$

Это доказывает вторую часть теоремы.

Предложение. *Собственные векторы симметрического линейного преобразования, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.*

Иначе говоря, если f – симметрическое линейное преобразование и

$$f(\vec{x}_1) = \lambda_1 \vec{x}_1 \quad (\vec{x}_1 \neq 0), \tag{4.38}$$

$$f(\vec{x}_2) = \lambda_2 \vec{x}_2 \quad (\vec{x}_2 \neq 0), \tag{4.39}$$

причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$.

Для доказательства воспользуемся равенством

$$(f(\vec{x}_1), \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_2)),$$

справедливым в силу симметричности f. Из этого равенства с учетом (4.38) и (4.39) следует

$$\lambda_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2),$$

и так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$.

§ 4.4. Квадратичные формы

1. Основные определения

Во многих вопросах, как чисто математических, так и прикладного характера, встречаются *квадратичные формы* от нескольких переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Так называется любой однородный многочлен второй степени от $x_1, x_2, ..., x_n$. Слово «однородный» означает, что все члены многочлена имеют одну и ту же (в данном случае вторую) степень.

Квадратичная форма от двух переменных имеет вид

$$\Phi = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2, \tag{4.40}$$

от трех переменных –

$$\Phi = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$$

(a, b, c, d, e, f – некоторые числа) и т.д. Однако более удобна другая форма записи. Например, форму (4.40) можно записать в виде

$$\Phi = ax_1^2 + \frac{b}{2}x_1x_2 + \frac{b}{2}x_2x_1 + cx_2^2,$$

после чего, обозначив коэффициент при произведении x_ix_j через a_{ij}, переписать (4.40) следующим образом:

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2,$$

где $a_{12} = a_{21}$. Вообще, квадратичную форму Φ от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ удобно записывать в виде

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{4.41}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

называется *матрицей квадратичной формы* Ф. Эта матрица – *симметрическая*, поскольку $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1,2, \ldots, n)$.

Выражение (4.41) для Ф можно записать следующим образом:

$$\Phi = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \ldots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n). \quad (4.43)$$

Если ввести в рассмотрение столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

то окажется возможным записать равенство (4.43) в матричной форме

$$\Phi = X^T(AX) = X^T AX. \quad (4.44)$$

2. Преобразование квадратичной формы при замене переменных

Пусть от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мы переходим к новым переменным $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ с помощью формул

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \ldots + p_{1n}x'_n, \\ x_2 &= p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \ldots + p_{2n}x'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \ldots + p_{nn}x'_n, \end{aligned} \quad (4.45)$$

где матрица

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

является невырожденной (последнее условие обеспечивает возможность выражения новых переменных через старые). Заменив в выражении (4.43) для Ф старые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ через новые $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ по формулам (4.45), получим выражение для Ф через новые переменные. Поскольку формулы (4.45) можно записать в виде

$$X = PX',$$

то легко получить новое выражение для Ф:

$$\Phi = (PX')^T A(PX') = X'^T (P^T AP)X'. \qquad (4.46)$$

Отсюда видно, что матрица квадратичной формы в новых переменных будет

$$A' = P^T AP. \qquad (4.47)$$

Симметричность A' легко проверяется:

$$(A')^T = (P^T AP)^T = P^T A^T P = P^T AP = A'.$$

Заметим, что формулы (4.45) можно истолковывать как формулы преобразования координат при переходе в $\mathbb{R}^n$ к новому базису, тогда равенство (4.47) можно рассматривать как *выражение для матрицы квадратичной формы* Ф *в новом базисе*.

2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Возникает задача о таком выборе преобразования координат, при котором запись Φ в новых координатах имеет особенно простой вид. Целый ряд соображений делают желательным следующий вид Φ в новых координатах:

$$\Phi = k_1(x_1')^2 + k_2(x_2')^2 + \cdots + k_n(x_n')^2,$$

когда в новом выражении для Φ отсутствуют члены с произведениями *различных* координат. Такой вид квадратичной формы называется *каноническим*. Нашей ближайшей задачей и будет как раз *приведение квадратичной формы* Φ *к каноническому виду путем перехода в* $\mathbb{R}^n$ *к некоторому специальному базису*.

Для этой цели рассмотрим в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ симметрическое линейное преобразование с матрицей A, т.е. отображение f, сопоставляющее произвольному вектору $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вектор $\vec{y} = f(\vec{x})$ с координатами

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Тогда, как показывает равенство (4.43), будем иметь

$$\Phi = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = (\vec{x}, \vec{y})\,. \tag{4.48}$$

Согласно теореме 4.3, в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно найти ортогональный базис, в котором f действует по формулам

$$y_1' = \lambda_1 x_1',\; y_2' = \lambda_2 x_2',\; \dots,\; y_n' = \lambda_n x_n', \tag{4.49}$$

в этих формулах $x_1', x_2', \dots, x_n'$ обозначают координаты произвольного вектора $\vec{x}$ в указанном базисе, а $y_1', y_2', \dots, y_n'$ – координаты вектора $\vec{y} = f(\vec{x})$.

Будем предполагать, что все базисные векторы нормированы, т.е. что базис не просто ортогональный, но и ортонормированный. Поскольку, как мы знаем, в ортонормированном базисе скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ равно сумме произведений их координат с одинаковыми номерами, то вместо (4.48) можем записать

$$\Phi = x_1' y_1' + \cdots + x_n' y_n'. \tag{4.50}$$

С учетом (4.49) получаем

$$\Phi = x_1' \lambda_1 x_1' + \cdots + x_n' \lambda_1 x_n',$$

или

$$\Phi = \lambda_1 (x_1')^2 + \cdots + \lambda_1 (x_n')^2.$$

Напомним, что такой вид квадратичной формы мы назвали каноническим; его особенность в том, что отсутствуют члены с произведением *различных* координат.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 4.4. *Любую квадратичную форму в некотором ортонормированном базисе можно привести к каноническому виду. Коэффициентами при квадратах переменных в этом каноническом виде являются собственные значения матрицы* A, *отвечающей данной квадратичной форме. При этом базис*, *в котором* Φ *принимает канонический вид*, *состоит из ортогональных собственных векторов преобразования* A.

Пример 4.4. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\Phi = 2x_1^2 + 6x_1 x_2 + 2x_2^2.$$

Решение. Данной квадратичной форме отвечает матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Она имеет собственные значения $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 5$. Поэтому канонический вид квадратичной формы можно написать сразу:

$$\Phi = -(x_1')^2 + 5(x_2')^2.$$

Найдем базис, в котором форма имеет такой вид. Собственным значениям λ_1 и λ_2 отвечают собственные векторы:

$$\vec{x}_1 = t(1,-1), \quad \vec{x}_2 = k(1,1) \quad (t, k \neq 0).$$

Соответствующие единичные собственные векторы имеют вид

$$\vec{a}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ \vec{a}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Следовательно, формулы связи старых и новых координат таковы:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2',$$
$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2'.$$

Эти формулы и осуществляют приведение данной квадратичной формы к каноническому виду.

3. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Выше мы рассмотрели способ приведения квадратичной формы к каноническому виду при помощи преобразования координат, вызванного переходом в пространстве $\mathbb{R}^n$ к некоторому специальному ортонормированному базису. Если не связывать себя условием, чтобы выбираемый в пространстве $\mathbb{R}^n$ базис был обязательно ортонормированным, то можно указать значительно более простой метод приведения к каноническому виду. Он называется *методом Лагранжа*.

Пусть дана квадратичная форма

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{4.51}$$

от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Предположим сначала, что $a_{11} \neq 0$. Легко видеть, что выражение

$$F = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2,$$

являющееся тоже квадратичной формой, содержит в точности такие же члены с переменной x_1, что и данная форма Ф. Поэтому разность $\Phi - F$ будет квадратичной формой, содержащей лишь переменные $x_2, ..., x_n$. Обозначим эту квадратичную форму через Φ_1. Итак,

$$\Phi = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2 + \Phi_1.$$

Выполнив преобразование переменных, эквивалентное выделению полного квадрата по переменной x_1:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= x_2, \\ &\cdots \\ y_n &= x_n, \end{aligned} \tag{4.52}$$

получим

$$\Phi = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \Phi_1,$$

где Φ_1 будет теперь квадратичной формой от переменных $y_2, ..., y_n$. Заметим, что преобразование (4.52) обратимо, так как из него можно выразить старые переменные $x_1, ..., x_n$ через новые $y_1, ..., y_n$.

Итак, нам удалось «отщепить» от формы Ф переменную x_1, однако лишь в предположении, что $a_{11} \neq 0$. Пусть теперь $a_{11} = 0$. Можно считать, что хотя бы один из коэффициентов $a_{12}, ..., a_{1n}$ отличен от нуля – в противном случае форма Ф вообще не содержала бы переменной x_1. Пусть, например, $a_{12} \neq 0$. Выполним тогда «предварительную» замену переменных

$$\begin{aligned} &x_1 = z_1 - z_2, \\ &x_1 = z_1 + z_2, \\ &x_3 = z_3, \\ &\quad \ldots \\ &x_n = z_n, \end{aligned} \tag{4.53}$$

которая, очевидно, обратима. В результате такой замены член $2a_{12}x_1x_2$ формы Φ примет вид

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2.$$

Ни одно из слагаемых $2a_{12}z_1^2$ и $-2a_{12}z_2^2$ не может сократиться ни с одним из слагаемых, полученных в результате замены остальных членов формы Φ, ибо каждое из этих слагаемых содержит в качестве множителя хотя бы одну из переменных $z_3, ..., z_n$. Так что и в случае $a_{11} = 0$ в форме Φ появился член с квадратом переменной z_1, что дает возможность «отщепить» от нее, как было показано ранее, член с квадратом z_1.

Таким образом, или сразу, или после выполнения «предварительной» замены переменных, от формы Φ можно «отщепить» член с квадратом одной из переменных:

$$\Phi = \lambda_1 y_1^2 + \Phi_1,$$

где форма Φ_1 зависит от переменных $y_2, ..., y_n$. Далее таким же путем «отщепляем» квадрат от Φ_1 и т.д., пока не придем к каноническому виду.

Замечание. Пусть квадратичная форма приведена к каноническому виду

$$\Phi = c_1 y_1^2 + \ldots + c_k y_k^2 - c_{k+1} y_{k+1}^2 - \ldots - c_r y_r^2 \ \ (c_i > 0, 1 \le i \le r). \tag{4.54}$$

Выполнив дополнительное преобразование

$$y_1 = \frac{z_1}{\sqrt{c_1}}, \ldots, y_k = \frac{z_k}{\sqrt{c_k}}, y_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{\sqrt{c_{k+1}}}, \ldots, y_r = \frac{z_r}{\sqrt{c_r}},$$

приведем квадратичную форму (4.54) к следующему виду:

$$\Phi = z_1^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \ldots - z_r^2. \tag{4.55}$$

Такой вид квадратичной формы называется *нормальным*. Он характеризуется тем, что входящие в него квадраты переменных имеют коэффициенты плюс или минус единица.

Пример 4.5. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\Phi = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3. \tag{4.56}$$

Решение. Ввиду отсутствия в этой форме квадратов неизвестных мы выполняем сначала «предварительное» преобразование

$$x_1 = z_1 - z_2,$$
$$x_2 = z_1 + z_2,$$
$$x_3 = z_3$$

с матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

после чего получим

$$\Phi = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 4z_1z_3 - 8z_2z_3.$$

Теперь коэффициент при z_1 отличен от нуля, что позволяет нам выделить квадрат одной переменной. Выполнив замену

$$y_1 = z_1 - z_3,$$
$$y_2 = z_2,$$
$$y_3 = z_3,$$

мы приведем Φ к виду

$$\Phi = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 - 8y_2y_3. \qquad (4.57)$$

Заметим, что обратное преобразование имеет вид

$$z_1 = y_1 + y_3,\ \ z_2 = y_2,\ \ z_3 = y_3,$$

соответствующая ему матрица есть

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее обращаемся к форме

$$\Phi_1 = -2y_2^2 - 2y_3^2 - 8y_2y_3.$$

Используя изложенную выше методику, выполняем преобразование

$$t_2 = y_2 + 2y_3,\ \ t_3 = y_3,$$

после чего находим

$$\Phi_1 = -2t_2^2 + 6t_3^2,$$

а значит,

$$\Phi = 2t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2, \qquad (4.58)$$

где $t_1 = y_1$.

В целом переход от (4.57) к (4.58) осуществляется при помощи преобразования

$$t_1 = y_1,\ \ t_2 = y_2 + 2y_3,\ \ t_3 = y_3,$$

для которого обратное есть

$$y_1 = t_1,\ y_2 = t_2 - 2t_3,\ y_3 = t_3$$

и имеет матрицу

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результирующее преобразование, приводящее (4.56) сразу к (4.58), имеет своей матрицей произведение

$$PQR = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. записывается в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 - t_2 + 3t_3, \\ x_2 &= t_1 + t_2 - t_3, \\ x_3 &= t_3. \end{aligned}$$

4. Закон инерции квадратичных форм

В заключительной части параграфа ответим на следующий вопрос. Пусть квадратичная форма

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{4.59}$$

от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ в результате линейного преобразования приведена к каноническому виду, который можно записать следующим образом (меняя, если, нужно, нумерацию переменных):

$$\Phi = a_1 y_1^2 + \ldots + a_k y_k^2 - b_1 y_{k+1}^2 - \ldots - b_l y_{k+l}^2 \quad (1 \le k + l \le n), \tag{4.60}$$

где все числа $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$ положительны. Будем в этом случае говорить, что канонический вид содержит k положительных и l отрицательных квадратов. Не может ли случиться, что, приведя форму Ф каким-то другим (тоже линейным) преобразованием переменных к каноническому виду

$$\Phi = c_1 z_1^2 + \ldots + c_p z_p^2 - d_1 z_{p+1}^2 - \ldots - d_q z_{p+q}^2, \tag{4.61}$$

где числа $c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_q$ положительны, мы окажемся перед такой ситуацией, когда $k \neq p$ или $l \neq q$? Оказывается, что такое положение исключается. Справедлива следующая теорема, часто называемая «законом инерции квадратичных форм».

Теорема 4.5. *Число положительных и число отрицательных квадратов в каноническом виде, к которому приводится квадратичная форма с помощью обратимого линейного преобразования переменных, не зависят от выбора этого преобразования.*

Доказательство. Пусть квадратичная форма (4.59) двумя способами приведена к каноническому виду (4.60) и (4.61). Так как переход от переменных $x_1, ..., x_n$ к $y_1, ..., y_n$ осуществляется с помощью обратимого линейного преобразования, то мы должны иметь

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j. \tag{4.62}$$

Аналогично

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j. \tag{4.63}$$

Предположим теперь, что $k < p$, и рассмотрим систему уравнений

$$y_1 = 0, \cdots, y_k = 0, z_{p+1} = 0, \cdots, z_n = 0, \tag{4.64}$$

где вместо $y_1, \cdots, y_k, z_{p+1}, \cdots, z_{p+q}$ подставлены их выражения из (4.62) и (4.63). Это – система линейных однородных уравнений относительно $x_1, ..., x_n$. При этом число уравнений в написанной системе, равное $n + k - p$, будет строго меньше n. По известной теореме об однородных системах уравнений обязательно существует ненулевое решение $X^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ системы (4.64). Подставив эти значения $x_1, ..., x_n$ в (4.62) и (4.63), получим некоторые числа $y_1^0, \ldots, y_n^0$ и $z_1^0, \ldots, z_n^0$. Учитывая (4.64), будем иметь из двух разных выражений (4.60) и (4.61) для формы Φ, что

$$-b_{k+1}\left(y_{k+1}^0\right)^2 - \ldots - b_{k+l}\left(y_{k+l}^0\right)^2 = c_1(z_1^0)^2 + \ldots + c_p(z_p^0)^2,$$

откуда очевидным образом следует, что все числа $y_{k+1}^0, ..., y_{k+l}^0$ и $z_1^0, ..., z_p^0$ равны нулю. Таким образом, каждое из чисел $z_1^0, \ldots, z_n^0$ равно нулю. Это означает, что $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ является ненулевым решением системы

$$z_1 = 0, \ \ldots, z_p = 0, z_{p+1} = 0, \ \ldots, z_n = 0.$$

Но это невозможно, так как линейное преобразование (4.63) является обратимым, а, значит, ненулевым значениям $x_1, ..., x_n$ соответствуют только ненулевые значения $z_1, ..., z_n$; тем самым ненулевое решение системы (4.64) невозможно.

К такому же противоречию придем, если предположим $k > p$. Итак, $k = p$. Аналогично доказывается равенство $l = q$. Теорема доказана.

5. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра

Квадратичная форма Φ от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется *определенной*, если $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ только в случае $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$. Если при этом $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ ($\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$) для всех остальных наборов $x_1, x_2, ..., x_n$, то Φ называется *положительно определенной* (соответственно *отрицательно определенной*) квадратичной формой.

Очевидно, что если Ф – положительно определенная квадратичная форма, то квадратичная форма F, определенная соотношением

$$F = -\Phi, \tag{4.65}$$

является отрицательно определенной.

Распознать, является ли форма Ф положительно определенной, можно по ее каноническому виду. Если последний окажется таким

$$\Phi = a_1 y_1^2 + \ldots + a_n y_n^2, \tag{4.66}$$

где все числа $a_1, \ldots, a_n$ положительны, то форма Ф будет положительно определенной; обратно, если Ф положительно определена, то ее канонический вид, очевидно, представляет собой сумму положительных квадратов.

Можно ли, однако, не приводя Ф к каноническому виду, узнать, будет ли она положительно определенной? Существует простой теоретический критерий, позволяющий ответить на этот вопрос.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица данной квадратичной формы. Условимся называть *угловыми минорами* матрицы A определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \cdots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{4.67}$$

расположенные, если можно так сказать, в «левом верхнем углу» матрицы A.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.6 (**критерий Сильвестра**). *Квадратичная форма* Φ *тогда и только тогда является положительно определенной, когда все угловые миноры ее матрицы строго положительны.*

Доказательство. Положительность миноров $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ будем доказывать индукцией по n.

При $n = 1$ единственным угловым минором формы $\Phi = a_{11}x^2$ является $\Delta_1 = a_{11}$; положительная определенность формы Φ равнозначна положительности a_{11}.

Допустим теперь, что утверждение теоремы справедливо для квадратичных форм от $n - 1$ переменных, и в этом предположении докажем его для квадратичной формы от n переменных.

Итак, пусть дана квадратичная форма

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j.$$

Представим ее в виде

$$\Phi = \Phi_1 + 2\sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i x_n + a_{nn}x_n^2,$$

где $\Phi_1 = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}x_i x_j$ есть квадратичная форма от переменных $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$. При $x_n = 0$ будем иметь $\Phi = \Phi_1$, поэтому из положительной определенности формы Φ следует положительная определенность Φ_1. Угловые миноры формы Φ_1 совпадают с угловыми минорами $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ формы Φ, поэтому из предположения индукции следует

$$\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_{n-1} > 0. \tag{4.68}$$

Положительность минора $\Delta_n = |A|$ вытекает из простого рассуждения. Мы знаем, что при замене координат матрица A квадратичной формы преобразуется в матрицу

$$A' = P^T AP,$$

где P – матрица перехода от новых координат к старым. Применяя теорему об определителе произведения матриц, получим

$$|A'| = |P^T||A||P| = |P|^2|A|, \tag{4.69}$$

т.е. $|A|$ и $|A'|$ имеют один и тот же знак. Но для формы

$$\Phi' = a_1 y_1^2 + \cdots + a_n y_n^2,$$

к которой Φ приводится преобразованием координат, минор $\Delta'_n = |A'|$, равный произведению $a_1 \ldots a_n$, больше нуля; значит, он положителен и для исходного вида формы Φ. Добавляя сюда уже доказанные ранее неравенства (4.68), получаем требуемое. Теорема доказана.

Из данной теоремы, принимая во внимание (4.65), нетрудно получить такое следствие.

Следствие. *Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, причем* $\Delta_1 < 0$:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots \tag{4.70}$$

Пример 4.6. Определить, являются ли положительно или отрицательно определенными перечисленные ниже квадратичные формы:

а) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,

б) $-x_1^2 - 5x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$,

в) $-x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3$.

Решение. а. Матрицей квадратичной формы является матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для нее

$$\Delta_1 = \det(2) = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 > 0.$$

Поэтому данная квадратичная форма – положительно определенная.

б. Соответствующая матрица равна

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вычислим угловые миноры:

$$\Delta_1 = \det(-1) = -1 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -20 < 0,$$

так что по критерию Сильвестра данная квадратичная форма – отрицательно определенная.

в. Матрицей данной квадратичной формы является матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для нее $\Delta_1 = -1 < 0,\ \Delta_2 = -2 < 0,\ \Delta_3 = 22 > 0.$ По критерию Сильвестра квадратичная форма не является ни положительно, ни отрицательно определенной.

ГЛАВА 5

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

§ 5.1. Собственные векторы неотрицательных матриц

Особенность матрицы A в модели международной торговли, а также в других экономических моделях, состоит в том, что все элементы этих матриц неотрицательны. В этом случае говорят, что A – *неотрицательная* матрица, и пишут $A \geq 0$. Среди неотрицательных матриц выделяют *положительные* матрицы $A > 0$, все элементы которых строго больше нуля.

В модели международной торговли мы ищем положительные собственные векторы. Напомним, что вектор $\vec{x}$ называется *положительным* (*неотрицательным*), если все его компоненты $x_i > 0$ (соответственно $x_i \geq 0$).

Пусть A – неотрицательная квадратная матрица и λ_A – максимальное по модулю собственное значение. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1 (Фробениуса – Перрона).

1. *λ_A – действительное неотрицательное число. Существует неотрицательный собственный вектор $\vec{x}_A$, соответствующий данному собственному значению.*

2. *Если $A > 0$, то $\lambda_A > 0$ и существует положительный собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_A.*

Доказательство утверждения 1 в общем случае приводить не будем. Тем не менее для *симметрических* неотрицательных матриц утверждение теоремы легко проверить. Действительно, легко показать, что в этом случае максимальное собственное значение матрицы A совпадает с максимумом квадратичной функции $\varphi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$ на единичной сфере $S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, |\vec{x}| = 1\}$. Положим

$\vec{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^T$. Тогда $\varphi(\vec{x}) = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}}{n}$, поэтому выполняется неравенство

$$\lambda_A \geq \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}}{n}. \tag{5.1}$$

Из (5.1) следует, что для любой неотрицательной симметрической матрицы $A \neq 0$ $\lambda_A > 0$.

Замечание. В общем случае неравенство (5.1) не выполняется. В качестве примера можно привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, для которой $\lambda_A = 0$.

Определение. *Максимальное по модулю собственное значение λ_A неотрицательной матрицы A называется **числом Фробениуса** матрицы A, а соответствующий ему неотрицательный собственный вектор $\vec{x}_A$ – **вектором Фробениуса** для A.*

Пример 5.1. Рассмотрим положительную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

У нее имеется два собственных значения: число Фробениуса $\lambda_A = 5$, которому соответствует собственный вектор $\vec{x}_A = t(1, 1)^T$ (он является вектором Фробениуса для $t > 0$), и собственное значение $\lambda_2 = -1$ с собственным вектором $\vec{x} = t(-1, 1)^T$ ($t \neq 0$). Очевидно, что выполняется неравенство $\lambda_A > |\lambda_2|$.

Пример 5.2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

У данной неотрицательной матрицы два собственных значения: $\lambda_A = 3$ – число Фробениуса с собственным вектором $\vec{x}_A = t(1, 0)^T$ ($\vec{x}_A \geq 0$ при $t > 0$) и собственное значение $\lambda_2 = 1$, которому соответствует собственный вектор $\vec{x} = t(-1, 1)^T$ ($t \neq 0$).

Замечание. Так как собственные значения матриц A и A^T совпадают, числа Фробениуса матрицы и ее транспонированной матрицы равны. Пусть $\vec{p}_A$ – вектор Фробениуса матрицы A^T, тогда

$$A^T \vec{p}_A = \lambda_A \vec{p}_A. \tag{5.2}$$

Транспонируя это равенство, получим

$$\vec{p}_A^{\,T} A = \lambda_A \vec{p}_A^{\,T}. \tag{5.3}$$

Поэтому векторы $\vec{p}_A^{\,T}$ и $\vec{x}_A$ иногда называют соответственно *левым* и *правым* векторами Фробениуса матрицы A.

Следствие. *Положительный собственный вектор $\vec{x}$ неотрицательной матрицы A является ее вектором Фробениуса.*

Доказательство. Обозначим через α собственное значение, которому принадлежит вектор $\vec{x}$; следовательно, выполнено равенство

$$A\vec{x} = \alpha\vec{x}.$$

Умножая его слева на $\vec{p}_A^{\,T}$ и учитывая (5.3), имеем

$$\vec{p}_A^{\,T} A\vec{x} = \lambda_A \vec{p}_A^{\,T} \vec{x},$$

так что

$$\alpha\vec{p}_A^{\,T} \vec{x} = \lambda_A \vec{p}_A^{\,T} \vec{x}.$$

Поскольку по условию $\vec{x} > 0$, то $\vec{p}_A^{\,T} \vec{x} \neq 0$, так что $\alpha = \lambda_A$, что и заканчивает доказательство.

Следствие. *Вектор Фробениуса положительной матрицы определен однозначно с точностью до умножения на положительное число.*

Доказательство. Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ – положительные собственные векторы положительной матрицы A. Рассмотрим n отношений

$$\frac{y_1}{x_1},\ \frac{y_2}{x_2},\ \ldots,\ \frac{y_n}{x_n}. \tag{5.4}$$

Пусть $\alpha = \dfrac{y_k}{x_k}$ – наименьшее (или одно из наименьших) среди отношений (5.4). Тогда для i-й (i = 1, 2, ..., n) координаты вектора $\vec{z} = \vec{y} - \alpha\vec{x}$ имеем

$$z_i = y_i - \frac{y_k}{x_k}x_i = x_i\left(\frac{y_i}{x_i} - \frac{y_k}{x_k}\right) \geq 0.$$

Следовательно, $\vec{z} \geq 0$. Как было доказано выше, $\vec{x}$ и $\vec{y}$ принадлежат собственному значению λ_A, поэтому

$$A\vec{z} = A\vec{y} - \alpha A\vec{x} = \lambda_A\vec{y} - \alpha\lambda_A\vec{x} = \lambda_A\vec{z}.$$

Отсюда следует, что либо $\vec{z} = 0$, либо $\vec{z}$ – неотрицательный собственный вектор матрицы A. Если $\vec{z} \neq 0$, то $\vec{z} > 0$, что противоречит равенству

$$z_k = y_k - \alpha x_k = y_k - \frac{y_k}{x_k}x_k = 0.$$

Поэтому $\vec{z} = 0$ и $\vec{y} = \alpha\vec{x}$.

Обозначим через $\vec{r}$ вектор-столбец, координата r_i которого есть сумма элементов i-й строки матрицы A, а через $\vec{s}$ вектор-строку, координата s_j которого есть сумма элементов j-го столбца матрицы A. Рассмотрим также вектор-столбец $\vec{l} = (1, \ldots, 1)^T$, состоящий из одних единиц. Тогда выполняются соотношения

$$\vec{r} = A\vec{l}, \tag{5.5}$$

$$\vec{s} = \vec{l}^{\,T} A. \tag{5.6}$$

Обозначим также

$$r = \min r_i,\ R = \max r_i,\ s = \min s_i,\ S = \max s_i.$$

Таким образом, выполняется

Теорема 5.2. *Число Фробениуса λ_A неотрицательной матрицы A удовлетворяет неравенствам*

$$\text{а) } r \le \lambda_A \le R; \tag{5.7}$$

$$\text{б) } s \le \lambda_A \le S. \tag{5.8}$$

Если к тому же матрица A положительна, то все неравенства строгие, за исключением случая, когда $r = R$ или $s = S$.

Доказательство. Выберем в качестве вектора Фробениуса $\vec{x}_A$ вектор, сумма координат которого равна единице, т.е.

$$\vec{l}^{\,T}\vec{x}_A = 1. \tag{5.9}$$

По определению имеем

$$A\vec{x}_A = \lambda_A \vec{x}_A.$$

Умножая это равенство слева на $\vec{l}^{\,T}$ и учитывая (5.6), получим

$$\vec{s}\vec{x}_A = \lambda_A\left(\vec{l}^{\,T}\vec{x}_A\right).$$

Поэтому

$$\lambda_A = \vec{s}\vec{x}_A = s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots + s_nx_n.$$

Отсюда следует, что

$$s(x_1 + \ldots + x_n) \le \lambda_A \le S(x_1 + \ldots + x_n). \tag{5.10}$$

Учитывая, что сумма координат вектора $\vec{x}_A$ равна 1, из неравенства (5.10) получаем (5.8). Неравенства (5.7) получаются аналогичными рассуждениями с заменой матрицы A на A^T.

Следствие. *Если все суммы строк (столбцов) неотрицательной матрицы A равны одному и тому же числу* λ (т.е. $R = r = \lambda$ или $S = s = \lambda$), *то число Фробениуса* λ_A *равно* λ.

Пример 5.3. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем $\lambda_A = 6$ (так как суммы по столбцам равны 6) и $\lambda_B = 3$ (суммы по строкам равны 3).

§ 5.2. Балансовые модели

1. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Эффективное ведение народного хозяйства предполагает наличие *баланса* между отдельными отраслями. Каждая отрасль при этом выступает двояко: с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями. Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями пользуются определенного вида таблицами – так называемыми таблицами межотраслевого баланса.

Идея таких таблиц была сформулирована в работах советских экономистов, а первая таблица опубликована ЦСУ в 1926 г. Однако вполне развитая математическая модель межотраслевого баланса, допускающая широкие возможности анализа, появилась позже (1936 г.) в трудах американского экономиста В. Леонтьева[1]. В данной книге излагается наиболее простой вариант такой модели, сохраняющий, однако, ее основное математическое содержание.

Будем предполагать, что вся производящая сфера народного хозяйства разбита на некоторое число n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт, причем разные отрасли про-

[1] В. Леонтьев эмигрировал в США из СССР в 1925 г. В 1963 г. ему была присуждена Нобелевская премия за работы в области экономики.

изводят разные продукты. Разумеется, такое представление об отрасли является в значительной мере абстракцией, так как в реальной экономике даже на отдельном предприятии производится значительное разнообразие выпускаемой продукции. Однако представление об отрасли в указанном выше смысле (как «чистой» отрасли) все же полезно, так как оно позволяет провести анализ сложившейся технологической структуры народного хозяйства, изучить функционирование народного хозяйства «в первом приближении».

Итак, предполагаем, что имеется n различных отраслей O_1, ..., O_n, каждая из которых производит свой продукт. В дальнейшем отрасль O_i будем коротко называть «i-я отрасль». В процессе производства своего продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Будем вести речь о некотором определенном промежутке времени $[T_0, T_1]$ (обычно таким промежутком служит плановый год) и введем следующие обозначения:

x_i – общий объем продукции отрасли i за данный промежуток времени – так называемый *валовой выпуск* отрасли i;

x_{ij} – объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j в процессе производства;

y_i – объем продукции отрасли i, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере, – объем *конечного потребления*.

Этот объем составляет обычно более 75% всей произведенной продукции. В него входят создаваемые в хозяйстве запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей (просвещение, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т.д.), поставки на экспорт.

Указанные величины можно свести в табл. 5.1. Балансовый характер этой таблицы выражается в том, что при любом $i = 1, ..., n$ должно выполняться соотношение

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i, \tag{5.11}$$

означающее, что валовой выпуск x_i расходуется на производственное потребление, равное $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}$, и непроизводственное, равное y_i. Будем называть (5.11) *соотношениями баланса.*

Таблица 5.1

Производственное потребление	Конечное потребление	Валовой выпуск
$x_{11}\quad x_{12}\quad \dots\quad x_{1n}$	y_1	x_1
$x_{21}\quad x_{22}\quad \dots\quad x_{2n}$	y_2	x_2
$\vdots\quad \vdots\quad \ddots\quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{n1}\quad x_{n2}\quad \dots\quad x_{nn}$	y_n	x_n

Единицы измерения всех указанных величин могут быть или натуральными (кубометры, тонны, штуки, киловатт-часы и т.п.), или стоимостными; в зависимости от этого различают *натуральный и стоимостный* межотраслевой балансы. Для определенности в дальнейшем будем иметь в виду (если не оговорено противное) стоимостный баланс.

В. Леонтьев, рассматривая развитие американской экономики в 30-е годы XX века, обратил внимание на важное обстоятельство, а именно на то, что величины $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ остаются постоянными в течение ряда лет. Это обусловливается примерным постоянством используемой технологии.

В соответствии со сказанным сделаем такое допущение: для выпуска любого объема x_j продукции отрасли j необходимо затратить продукцию отрасли i в количестве $a_{ij}x_j$, где a_{ij} – постоянный коэффициент. Проще говоря, материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Это допущение постулирует, как говорят, *линейность* существующей технологии. Принцип линейности распространяют и на другие виды издержек (например, на оплату труда), а также на нормативную прибыль.

Итак, согласно гипотезе линейности имеем

$$x_{ij} = a_{ij}x_j \quad (i, j = 1,..., n). \tag{5.12}$$

Коэффициенты a_{ij} называют *коэффициентами прямых затрат* (коэффициентами материалоемкости).

Подставляя соотношения (5.12) в уравнения баланса (5.11), получим систему n линейных уравнений относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n, \end{cases}$$

или, в матричной записи,

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}, \tag{5.13}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \; \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Вектор $\vec{x}$ называется *вектором валового выпуска*, вектор $\vec{y}$ – *вектором конечного потребления*, а матрица A – *матрицей прямых затрат.* Соотношение (5.13) называется *уравнением линейного межотраслевого баланса*. Вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ это соотношение называют также *моделью Леонтьева*.

Уравнения межотраслевого баланса можно использовать для целей планирования. В этом случае задача ставится так: для предстоящего планового периода $[T_0, T_1]$ задается вектор $\vec{y}$ конечного потребления, требуется определить вектор $\vec{x}$ валового выпуска. Проще говоря, нужно решить задачу: сколько следует произвести продукции различных видов, чтобы обеспечить заданный уровень конечного потребления? В этом случае необходимо решить систему линейных уравнений (5.13) с неизвестным вектором $\vec{x}$ при заданной матрице A и заданном векторе $\vec{y}$. При этом нужно иметь в виду следующие особенности системы (5.13).

1. Все компоненты матрицы A и вектора $\vec{y}$ неотрицательны (это вытекает из экономического смысла A и $\vec{y}$). Для краткости будем говорить о неотрицательности самой матрицы A и вектора $\vec{y}$ и записывать это так: $A \geq 0$, $\vec{y} \geq 0$.

2. Все компоненты вектора $\vec{x}$ также должны быть неотрицательными: $\vec{x} \geq 0$.

Замечание. Обратим внимание на смысл коэффициентов a_{ij} прямых затрат в случае стоимостного (а не натурального) баланса. В этом случае из (5.12) видно, что a_{ij} совпадает со значением x_{ij} при $x_j = 1$ (1 руб.).

Таким образом, a_{ij} есть стоимость продукции отрасли i, вложенной в 1 руб. продукции отрасли j. Отсюда, между прочим, видно, что стоимостный подход по сравнению с натуральным обладает более широкими возможностями. При таком подходе уже необязательно рассматривать "чистые", т.е. однопродуктовые отрасли. Ведь и в случае многопродуктовых отраслей тоже можно говорить о (стоимостном) вкладе одной отрасли в выпуск 1 руб. продукции другой отраслью; скажем, о вкладе промышленной сферы в выпуск 1 руб. сельскохозяйственной продукции или о вкладе промышленной группы А (производство средств производства) в выпуск 1 руб. продукции группы В (производство предметов потребления). Вместе с тем надо понимать, что планирование исключительно в стоимостных величинах может легко привести к дисбалансу потоков материально-технического снабжения.

2. Продуктивные модели Леонтьева

Определение. *Матрица* $A \geq 0$ *называется* ***продуктивной***, *если для любого вектора* $\vec{y} \geq 0$ *существует решение* $\vec{x} \geq 0$ *уравнения*

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}. \tag{5.14}$$

В этом случае и модель Леонтьева, определяемая матрицей A, тоже называется продуктивной. Другими словами, модель продуктивна, если любое конечное потребление $\vec{y}$ можно обеспечить при подходящем валовом выпуске $\vec{x}$.

Уравнение Леонтьева (5.14) можно записать следующим образом:

$$(E - A)\vec{x} = \vec{y}, \tag{5.15}$$

где E – единичная матрица. Возникает, естественно, вопрос об обращении матрицы $E - A$. Понятно, что если обратная матрица $(E - A)^{-1}$ существует, то из (5.15) вытекает

$$\vec{x} = (E - A)^{-1}\vec{y}. \tag{5.16}$$

Теорема 5.3 (первый критерий продуктивности). *Матрица $A \geq 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна.*

Доказательство. Если матрица $(E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна, то из (5.16) сразу же следует продуктивность матрицы A.

Обратно, пусть матрица A продуктивна. Рассмотрим следующие системы уравнений:

$$(E - A)\vec{x} = \vec{e}_1,\ (E - A)\vec{x} = \vec{e}_2,\ \ldots,\ (E - A)\vec{x} = \vec{e}_n,$$

где $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ – столбцы единичной матрицы. Каждая из этих систем в силу продуктивности матрицы A имеет неотрицательное решение, т.е. существуют такие векторы (столбцы) $\vec{c}_1 \geq 0$, $\vec{c}_2 \geq 0$, ..., $\vec{c}_n \geq 0$, что

$$(E - A)\vec{c}_1 = \vec{e}_1,\ (E - A)\vec{c}_2 = \vec{e}_2,\ \ldots,\ (E - A)\vec{c}_n = \vec{e}_n. \tag{5.17}$$

Обозначим через C матрицу, составленную из столбцов $\vec{c}_1,\ \vec{c}_2$, ..., $\vec{c}_n$. Тогда вместо n равенств (5.17) можно написать одно:

$$(E - A)C = E.$$

Следовательно, матрица $E - A$ имеет обратную C, причем $C \geq 0$. Теорема доказана.

Пример 5.4. Исследовать на продуктивность матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е . В данном случае

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Необходимые вычисления предоставим читателю провести самостоятельно. Получаем матрицу $(E - A)^{-1}$, которая существует и равна

$$\begin{pmatrix} 35 & 30 \\ 45 & 40 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что эта матрица неотрицательна. Следовательно, A продуктивна.

Понятие числа Фробениуса неотрицательной матрицы позволяет по-другому решить задачу определения ее продуктивности.

Т е о р е м а 5.4 (второй критерий продуктивности). *Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше единицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть неотрицательная матрица A продуктивна. Тогда для любого неотрицательного вектора $\vec{y}$ существует решение $\vec{x} \geq 0$ уравнения (5.14). Пусть $\vec{y} > 0$, тогда, очевидно, $\vec{x} > 0$. Умножив равенство (5.14) слева на левый вектор Фробениуса $\vec{p}_A^{\,T}$ и учитывая, что

$$\vec{p}_A^{\,T} A = \lambda_A \vec{p}_A^{\,T}, \tag{5.18}$$

получим

$$\lambda_A \left(\vec{p}_A^{\,T} \vec{x}\right) + \vec{p}_A^{\,T} \vec{y} = \vec{p}_A^{\,T} \vec{x},$$

или

$$(1 - \lambda_A)\left(\vec{p}_A^{\,T} \vec{x}\right) = \vec{p}_A^{\,T} \vec{y}.$$

Так как $\vec{p}_A^{\,T} \geq 0$ и $\vec{y} > 0$, $\vec{x} > 0$, то $\vec{p}_A^{\,T} \vec{y} > 0$, $\vec{p}_A^{\,T} \vec{x} > 0$. Поэтому из последнего равенства вытекает, что $\lambda_A < 1$.

Обратно, пусть неотрицательная матрица A имеет число Фробениуса $\lambda_A < 1$. Покажем, что она продуктивна. Возьмем неотрицательный вектор $\vec{y}$ и покажем, что у системы (5.14) существует решение $\vec{x} \geq 0$.

Рассмотрим следующую неотрицательную матрицу размера $(n + 1) \times (n + 1)$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – элементы матрицы A и $y_1, ..., y_n$ – координаты вектора $\vec{y}$. В более компактной форме матрицу $\tilde{A}$ можно записать так:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & \vec{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножая эту матрицу слева на вектор $\vec{p}^T = (0, ..., 0, 1)$, легко убедиться, что

$$\vec{p}^T \tilde{A} = \vec{p}^T.$$

Следовательно, одним из собственных значений матрицы $\tilde{A}$ является $\lambda = 1$.

Пусть вектор $X = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = (\vec{x}, x_{n+1})$, является собственным вектором матрицы $\tilde{A}$, т.е. $\tilde{A}X = \lambda X$. В силу определения матрицы $\tilde{A}$ это равносильно тому, что

$$\begin{pmatrix} A & \vec{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \vec{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} A\vec{x} + \vec{y} \cdot x_{n+1} = \lambda \vec{x}, \\ x_{n+1} = \lambda x_{n+1}. \end{cases} \tag{5.19}$$

Если $\lambda \neq 1,$ то из второго соотношения системы (5.19) следует, что $x_{n+1} = 0$, в силу чего первое уравнение примет вид $A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$ Следовательно, λ – собственное значение матрицы A и, по нашему предположению, $|\lambda| < 1.$ Таким образом, $\lambda_{\tilde{A}} = 1$ является положительным и максимальным по модулю собственным значением, следовательно, является числом Фробениуса. По теореме Фробениуса-Перрона у матрицы $\tilde{A}$ существует неотрицательный собственный вектор $\vec{x}_{\tilde{A}} = (\vec{x}_A, x_{n+1}),$ соответствующий $\lambda_{\tilde{A}} = 1.$ Очевидно, что $x_{n+1} \neq 0,$ так как в противном случае из (5.19) следовало бы, что $A\vec{x} = \vec{x}.$ А это противоречит тому, что число Фробениуса $\lambda_A < 1.$ Поэтому мы можем считать, что $x_{n+1} = 1$ (очевидно, что вектор $\dfrac{\vec{x}}{x_{n+1}}$ также является вектором Фробениуса). Так как $x_{n+1} = 1$, равенство (5.19) принимает вид

$$A\vec{x}_A + \vec{y} = \vec{x}_A.$$

Поскольку $\vec{x}_{\tilde{A}} = (\vec{x}_A, x_{n+1}) \geq 0,$ то $\vec{x}_A \geq 0.$

Следовательно, матрица A продуктивна.

Следствие. *Если для неотрицательной матрицы A и некоторого положительного вектора $\vec{y}^*$ уравнение* (5.14) *имеет неотрицательное решение $\vec{x}^*$, то матрица A продуктивна.*

Доказательство. Как было уже показано, из существования положительного решения $\vec{y}^*$ уравнения (5.14) следует, что $\lambda_A < 1$ (см. (5.19)). На основании теоремы 5.4 матрица A продуктивна.

Пример 5.5. Показать продуктивность матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,6 \\ 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сумма элементов каждого столбца меньше единицы. Согласно теореме 5.2 $\lambda_A < 1$. Значит, A продуктивна.

Пример 5.6. Выяснить, при каких значениях $a > 0$ матрица

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

будет продуктивной.

Решение. Найдем характеристический многочлен матрицы A

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 2a & 0 \\ 2a & a-\lambda & 0 \\ 7a & 6a & 9a-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (9a-\lambda)\left((a-\lambda)^2 - 4a^2\right) = (9a-\lambda)\left(\lambda^2 - 2a\lambda - 3a^2\right),$$

поэтому характеристическое уравнение имеет вид

$$(9a-\lambda)\left(\lambda^2 - 2a\lambda - 3a^2\right) = 0.$$

Корни этого уравнения (собственные значения):

$$\lambda_1 = 9a, \lambda_2 = 3a, \lambda_3 = -a.$$

Согласно доказанной теореме для продуктивности A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $9a < 1$, т.е. $a < 1/9$. Например, при $a = 0{,}1$ получим продуктивную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Продолжим анализ продуктивности модели Леонтьева.

Пусть a – некоторое число. Из курса математического анализа известно, что если ряд

$$1 + a + a^2 + \ldots$$

(бесконечная геометрическая прогрессия) сходится (условием этого является $|a| < 1$), то его сумма равна $(1 - a)^{-1}$. Убедимся, что аналогичное предложение имеет место при замене числа a матрицей A.

Лемма. *Если бесконечный ряд (из матриц)*

$$1 + A + A^2 + \ldots \tag{5.20}$$

сходится, то его сумма есть матрица $(E - A)^{-1}$.

Доказательство. Пусть ряд (5.20) сходится. Прежде всего покажем, что матрица $(E - A)$ имеет обратную матрицу.

Рассуждая от противного, допустим, что матрица $E - A$ вырожденная. Рассмотрим тождество

$$(E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1})(E - A) = E - A^k. \tag{5.21}$$

Мы знаем, что уравнение $B\vec{x} = 0$ с вырожденной матрицей B обязательно имеет ненулевое решение. Следовательно, существует вектор $\vec{x} \neq 0$, такой, что $(E - A)\vec{x} = 0$. Применив к вектору $\vec{x}$ обе части равенства (5.21), получим $(E - A^k)\vec{x} = 0$, или $\vec{x} = A^k\vec{x}$. Но $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, что следует из сходимости ряда (5.20) (необходимое условие сходимости ряда). Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} A^k\vec{x} = 0$, т.е. $\vec{x} = 0$, вопреки условию. Таким образом, матрица $E - A$ имеет обратную.

Из (5.21) находим

$$E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1} = (E - A^k)(E - A)^{-1}.$$

С учетом того, что $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, получаем

$$\lim_{k\to\infty}\left(E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}\right) = \left(E - A\right)^{-1}.$$

Итак, сумма ряда (5.20) существует и равна $(E - A)^{-1}$. Лемма доказана.

Теорема 5.5 (третий критерий продуктивности). *Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда сходится бесконечный ряд*

$$E + A + A^2 + \ldots \tag{5.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сходится ряд (5.22). Согласно лемме его сумма равна $(E - A)^{-1}$. При этом сумма указанного ряда будет неотрицательна, поскольку все слагаемые ряда неотрицательны. Итак, матрица $(E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна. Отсюда по теореме 5.3 следует продуктивность A.

Обратное утверждение (если A продуктивна, то ряд (5.22) сходится) доказывать не будем.

О п р е д е л е н и е. *Пусть $A \geq 0$ – продуктивная матрица.* ***Запасом продуктивности*** *матрицы A назовем такое число $\alpha > 0$, что все матрицы λA, где $1 < \lambda < 1 + \alpha$, продуктивны, а матрица $(1 + \alpha)\cdot A$ не продуктивна.*

П р и м е р 5.7. Найти запас продуктивности матрицы A из примера 5.4.

Р е ш е н и е. Будем руководствоваться критерием продуктивности из теоремы 5.3 (существование неотрицательной матрицы $(E - A)^{-1}$). В данном случае

$$E - \lambda A = \begin{pmatrix} 1 - 0{,}2\lambda & -0{,}6\lambda \\ -0{,}9\lambda & 1 - 0{,}3\lambda \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы

$$\Delta = |E - \lambda A| = (1 - 0{,}2\lambda)(1 - 0{,}3\lambda) - 0{,}54\lambda^2 = -0{,}48\lambda^2 - 0{,}5\lambda + 1.$$

Обратной матрицей будет

$$(E - \lambda A)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1 - 0{,}3\lambda}{\Delta} & \dfrac{0{,}6\lambda}{\Delta} \\ \dfrac{0{,}9\lambda}{\Delta} & \dfrac{1 - 0{,}2\lambda}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Для продуктивности матрицы λA нужно, чтобы все элементы обратной матрицы были неотрицательны. Это возможно лишь, если $\Delta > 0$, $1 - 0{,}2\lambda \geq 0$, $1 - 0{,}3\lambda \geq 0$. Приближенные корни уравнения $\Delta = 0$ суть $\lambda_1 = -2{,}06$ и $\lambda_2 = 1{,}015$, поэтому $(E - \lambda A)^{-1} \geq 0 \iff \lambda < 1{,}015$. При $\lambda < \lambda_2$ матрица λA будет продуктивной, при $\lambda = \lambda_2$ – нет. Запас продуктивности матрицы A равен 0,015. Мы видим, что матрица A находится где-то «на пределе» продуктивности.

Обычно матрицы A межотраслевого баланса обладают большим запасом продуктивности. Рост производственных расходов (в частности, учет затрат на преодоление негативных воздействий производства на окружающую среду) вызывает увеличение элементов матрицы A и, как следствие, снижение ее запаса продуктивности.

3. Вектор полных затрат

Пусть $A \geq 0.$ Равенство

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + ... \tag{5.23}$$

справедливо, как мы уже знаем, в том и только в том случае, когда матрица A продуктивна, имеет интересный экономический смысл. Чтобы это увидеть, обратимся снова к формуле (5.16). С учетом формулы (5.23) она принимает вид

$$\vec{x} = \vec{y} + A\vec{y} + A^2\vec{y} + \ldots \tag{5.24}$$

В чем смысл распадения вектора $\vec{x}$ на слагаемые $\vec{y},$ $A\vec{y},$ $A^2\vec{y}$ и т.д.? Для получения валового выпуска $\vec{x},$ обеспечивающего конечное потребление $\vec{y},$ нужно прежде всего произвести набор товаров, описываемый вектором $\vec{y}.$ Но этого мало – ведь для получения $\vec{y}$ нужно затратить (а значит, сначала произвести) продукцию, описываемую вектором $A\vec{y}.$ Но и этого мало – для получения $A\vec{y}$ нужно осуществить дополнительные затраты, описываемые вектором $A(A\vec{y}) = A^2\vec{y},$ и т.д. В итоге приходим к заключению, что весь валовой выпуск $\vec{x}$ должен составляться из слагаемых $\vec{y},$ $A\vec{y},$ $A^2\vec{y}$ и т.д., что и зафиксировано в формуле (5.24). В соответствии с этим рассуждением сумму $\vec{y} + A\vec{y} + A^2\vec{y} + \ldots$ называют *вектором полных затрат*, а сделанное выше заключение формулируют так: *вектор валового выпуска* $\vec{x}$ *совпадает с вектором полных затрат.*

Чтобы сделать это заключение более конкретным, рассмотрим такой пример. Пусть речь идет о блоке из трех промышленных отраслей:

1) металлургия;

2) электроэнергетика;

3) угледобыча.

Для получения конечного выпуска $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ необходимо прежде всего произвести:

y_1 т металла; y_2 кВт·ч электроэнергии; y_3 т угля.

Но для производства y_1 т металла, в свою очередь, необходимо затратить (а значит, сначала произвести) какие-то количества металла, электроэнергии и угля. То же самое справедливо и в отношении производства y_2 кВт·ч электроэнергии и y_3 т угля (рис. 5.1).

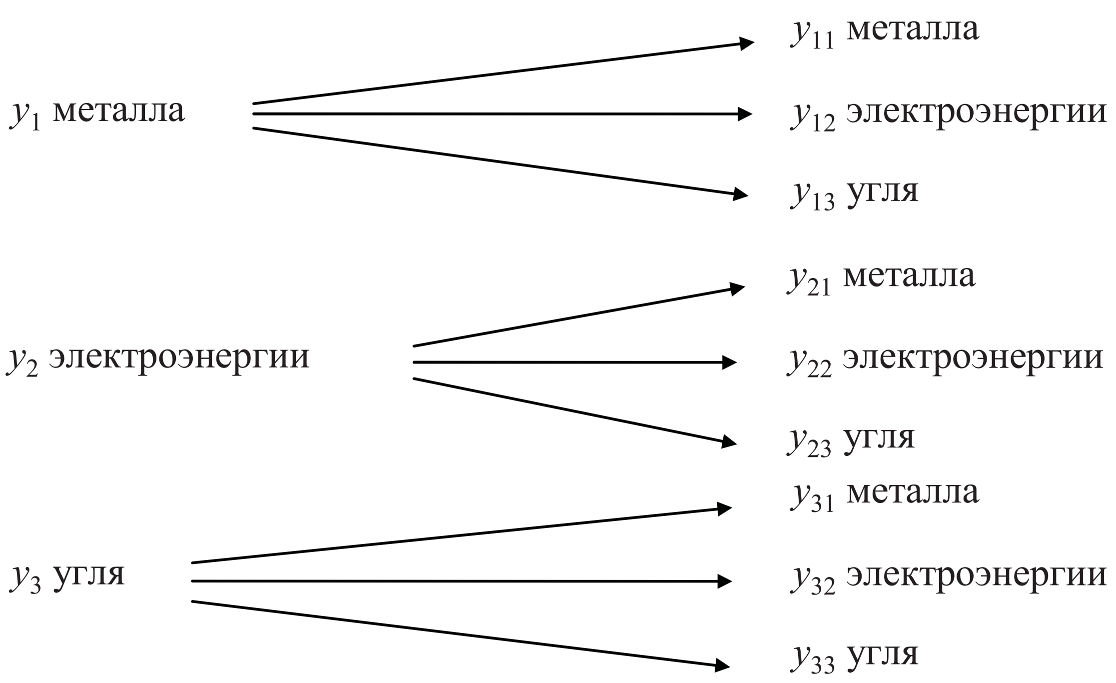

Рис. 5.1

В свою очередь, для производства y_{11} т металла необходимо затратить какие-то количества металла, электричества, угля и т.д. Искомый валовой выпуск $\vec{x}$ представляет собой сумму затрат: нулевого порядка (вектор $\vec{y}$), первого порядка (вектор $A\vec{y}$), второго порядка $(A^2\vec{y})$ и т.д.

4. Модель равновесных цен

Рассмотрим теперь балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева – так называемую модель равновесных цен. Пусть, как и прежде, A – матрица прямых затрат, $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – вектор валового выпуска. Обозначим через $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)^T$ вектор цен, i-я координата которого равна цене единицы продукции i-й отрасли; тогда, например, первая отрасль получит доход, равный $p_1 \cdot x_1$. Часть своего дохода эта отрасль потратит на закупку продукции у других отраслей. Так, для выпуска единицы продукции ей необходима продукция первой отрасли в объеме a_{11}, второй отрасли в объеме a_{21}, и т.д., n-й отрасли в объеме a_{n1}. На покупку этой продукции ею будет затрачена сумма, равная $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n$. Следовательно, для выпуска продукции в объеме x_1 первой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму, равную $x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n)$. Оставшуюся часть дохода, называемую добавленной стоимостью, мы обозначим через V_1 (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции).

Таким образом, имеет место следующее равенство:

$$x_1p_1 = x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n) + V_1.$$

Разделив это равенство на x_1, получаем

$$p_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n + v_1,$$

где $v_1 = V_1/x_1$ – норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции). Подобным же образом получаем для остальных отраслей

$$p_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{n2}p_n + v_2,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$p_n = a_{1n}p_n + a_{2n}p_2 + ... + a_{nn}p_n + v_n.$$

Найденные равенства могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

$$\vec{p} = A^T\vec{p} + \vec{v},$$

где $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)^T$ – вектор норм добавленной стоимости. Как мы видим, полученные уравнения очень похожи на уравнения модели Леонтьева, с той лишь разницей, что $\vec{x}$ заменен на $\vec{p}$, $\vec{y}$ – на $\vec{v}$, A – на A^T.

Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукцию отраслей. Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

Пример 5.8. Пусть дана экономическая система, состоящая из трех отраслей: топливно-энергетической, промышленности и сельского хозяйства. Пусть

$$A^T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

– транспонированная матрица прямых затрат, $\vec{v} = (4; 10; 4)^T$ – вектор норм добавленной стоимости. Определить равновесные цены.

Решение. Для нахождения равновесных цен воспользуемся формулой

$$\vec{p} = C^T \vec{v},$$

где $C^T = (E - A^T)^{-1}$ – транспонированная матрица полных затрат.

После необходимых вычислений имеем

$$C^T = \frac{1}{0,444} \begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $\vec{p} = C^T \vec{v} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 25 \end{pmatrix}^T$.

Допустим теперь, что в топливно-энергетической отрасли произойдет увеличение нормы добавленной стоимости на 1,11. Определим равновесные цены в этом случае. Принимая во внимание, что $\vec{v} = (5,11; 10; 4)^T$, находим, что

$$\vec{p} = C^T \vec{v} = \begin{pmatrix} 11,45 \\ 20,7 \\ 15,625 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, продукция первой отрасли подорожала на 14,5 %, второй – на 3,5 %, третьей – на 4,17 %. Нетрудно также, зная объемы выпуска, подсчитать вызванную этим повышением инфляцию.

§ 5.3. Дополнение к модели международной торговли

Теорема Фробениуса – Перрона часто применяется при исследовании линейных экономических моделей. Посмотрим, например, как эта теорема может уточнить наши сведения о модели международной торговли. Напомним, что модель международной торговли задается структурной матрицей $A = (a_{ij})$, где a_{ij} – доля импорта из страны i в бюджете страны j. Матрица $A \geq 0$ и все ее столбцевые суммы равны 1. Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – вектор бюджетов стран-участниц торговли. Основное уравнение имеет вид $A\vec{x} = \vec{x}$. Таким образом, $\vec{x}$ – собственный вектор матрицы A, принадлежащий собственному значению 1. Возникает вопрос: будет ли 1 максимальным собственным значением?

Пусть $\vec{e} = (1, 1,..., 1)^T$ – n-мерный вектор, все координаты которого равны единице. Так как все столбцевые суммы матрицы A равны 1, то $A^T\vec{e} = \vec{e}$. Пусть λ_A – число Фробениуса матрицы A. Тогда найдется такой неотрицательный вектор $\vec{y}$, что $A\vec{y} = \lambda_A\vec{y}$. Рассмотрим скалярное произведение $(\vec{e}, A\vec{y})$:

$$(\vec{e}, A\vec{y}) = (\vec{e}, \lambda_A\vec{y}) = \lambda_A(\vec{e}, \vec{y}), \tag{5.25}$$

$$(\vec{e}, A\vec{y}) = \left(A^T\vec{e}, \vec{y}\right) = (\vec{e}, \vec{y}). \tag{5.26}$$

Так как $(\vec{e}, \vec{y}) = y_1 + y_2 + ... + y_n > 0$, то из (5.25), (5.26) получаем

$$\lambda_A = \frac{(\vec{e}, \vec{y})}{(\vec{e}, \vec{y})} = 1.$$

Итак, 1 – максимальное собственное значение матрицы A. По теореме Фробениуса – Перрона получаем, что уравнение $A\vec{x} = \vec{x}$ всегда имеет ненулевое неотрицательное решение $\vec{x}$. Так как бюджет любой страны $x_i > 0$, то интерес представляют только положительные решения $\vec{x} > 0$. В случае $A > 0$ существование положительного решения следует опять из теоремы Фробениуса – Перрона. В то же время, если какая-то страна j не импортирует товары из страны i, то матрица A не является положительной (так как $a_{ij} = 0$). Можно ли утверждать существование положительного решения уравнения $A\vec{x} = \vec{x}$ в этом случае?

Для ответа на данный вопрос введем понятие цепочки импорта. Скажем, что страны i и j связаны *цепочкой импорта* от i к j, если существует цепочка стран с началом в i и концом в j, в которой каждая последующая страна импортирует товары из предыдущей. Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad (5.27)$$

имеется такая цепочка

$$1 \to 4 \to 3 \to 2. \qquad (5.28)$$

Теорема 5.6 (о цепочке). *Если в модели международной торговли структурная матрица A такова, что любые две страны i и j можно связать цепочкой импорта от i к j, то уравнение* $A\vec{x} = \vec{x}$ *имеет положительное решение* $\vec{x} > 0$, *единственное с точностью до умножения на число.*

Доказательство. Пусть n – число всех стран. Тогда любые две страны, которые можно связать цепочкой импорта произвольной длины, можно связать и цепочкой, в которой не более n стран. Действительно, любую цепочку можно сократить до желаемой длины, удалив все замкнутые петли. Если страны i и j можно соединить цепочкой импорта от i к j, содержащей k стран (включая i и j), то элемент i-й строки и j-го столбца матрицы A^{k-1} больше нуля, $(A^{k-1})_{ij}>0$. Это следует из того, что $(A^{k-1})_{ij}$ является суммой неотрицательных произведений вида

$$a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \ldots a_{j_{k-1} j_k}$$

по всем цепочкам $j_1 \to j_2 \to \ldots \to j_k$ от i к j ($j_1 = i$ и $j_k = j$). Например, для матрицы (5.27)

$$\begin{aligned}(A^3)_{12} &= a_{11}a_{11}a_{12} + a_{11}a_{12}a_{22} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{11}a_{14}a_{42} + \\ &+ a_{12}a_{21}a_{12} + a_{12}a_{22}a_{22} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{24}a_{42} + \\ &+ a_{13}a_{31}a_{12} + a_{13}a_{32}a_{22} + a_{13}a_{33}a_{32} + a_{13}a_{34}a_{42} + \\ &+ a_{14}a_{41}a_{12} + a_{14}a_{42}a_{22} + a_{14}a_{43}a_{32} + a_{14}a_{44}a_{42}.\end{aligned} \tag{5.29}$$

Все 16 слагаемых в правой части (5.29) неотрицательны, так как являются произведениями элементов неотрицательной матрицы A. Кроме того, по крайней мере одно слагаемое $a_{14}\, a_{43}\, a_{32} > 0$ благодаря существованию цепочки (5.28). Отсюда следует, что $(A^3)_{12} > 0$.

Пусть матрица A такова, что любые две страны $i \neq j$ можно соединить цепочкой импорта. Как уже было отмечено, достаточно учитывать только цепочки, содержащие не более n стран. Следовательно, для такой матрицы A хотя бы одно из чисел

$$(A)_{ij},\ (A^2)_{ij}\ ,\ldots,\ (A^{n-1})_{ij}$$

больше нуля. Следовательно, при $i \neq j$ имеем

$$(A + A^2 + \ldots + A^{n-1})_{ij} > 0.$$

Таким образом, у матрицы $A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ вне главной диагонали расположены только положительные числа. Добавив к этой матрице единичную матрицу E, получим положительную матрицу

$$B = E + A + A^2 + \ldots + A^{n-1} > 0.$$

Пусть $\vec{x}$ – собственный вектор матрицы A, принадлежащий собственному значению λ. Тогда

$$\begin{aligned}B\vec{x} &= \left(E + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}\right)\vec{x} = \vec{x} + \lambda\vec{x} + \lambda^2\vec{x} + \ldots + \lambda^{n-1}\vec{x} = \\ &= \left(1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{n-1}\right)\vec{x},\end{aligned}$$

т.е. вектор $\vec{x}$ одновременно является и собственным вектором матрицы B. Теперь теорема легко следует из доказанных выше утверждений и теоремы Фробениуса – Перрона. Действительно, 1 – максимальное собственное значение матрицы *A*, поэтому уравнение $A\vec{x} = \vec{x}$ имеет неотрицательное решение $\vec{x}$. Всякое такое решение $\vec{x} \geq 0$ является одновременно собственным вектором положительной матрицы *B*, поэтому $\vec{x} > 0$, т.е. уравнение $A\vec{x} = \vec{x}$ имеет положительные решения $\vec{x}$. Пусть $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – два таких решения. Тогда $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – положительные собственные векторы матрицы $B > 0$. Согласно второму утверждению теоремы Фробениуса – Перрона найдется такое число α, что $\vec{x}_1 = \alpha\vec{x}_2$. Теорема о цепочке доказана.

Замечание. Пусть *A* – неотрицательная матрица размера $n \times n$. Для того чтобы установить возможность соединения любых *i* и *j* ($1 \leq i,\ \ j \leq n$) цепочкой чисел, в которой любые два соседних числа *k* и *l* таковы, что $a_{kl} > 0$, достаточно построить замкнутую цепочку, содержащую (возможно, с повторениями) все натуральные числа от 1 до *n*. Например, для матрицы (5.27) имеется замкнутая цепочка

$$1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1. \tag{5.30}$$

Поэтому для матрицы (5.27) любые два натуральных числа *i* и *j* ($1 \leq i,\ \ j \leq 4$) можно соединить цепочкой от *i* к *j* и от *j* к *i*, используя участки цепочки (5.30).

ГЛАВА 6

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 6.1. Точечные пространства

Из школьного курса геометрии известно, что с каждой парой точек A и B на плоскости можно связать вектор $\overrightarrow{AB}$. И наоборот, от любой точки A можно отложить вектор $\vec{a}$ и получить точку B (рис. 6.1).

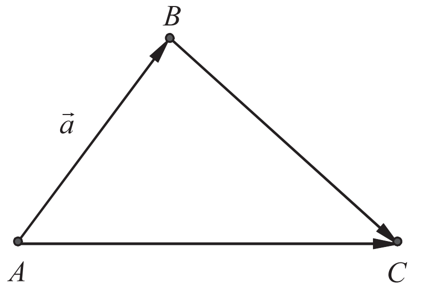

Рис. 6.1

Для любых трех точек A, B, C выполняется правило сложения векторов:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Обобщением этой связи между точками и векторами служит понятие *точечного пространства*.

Определение. *Пусть дано векторное пространство V. Непустое множество T называют* ***точечным*** *(****аффинным****)* ***пространством, ассоциированным с*** *V, если выполнены следующие аксиомы*:

1. *Каждой упорядоченной паре точек M и N из T поставлен в соответствие вектор $\vec{x} = \overrightarrow{MN}$ из V.*

2. *Для каждой точки M из T и любого вектора* $\vec{x} \in V$ *имеется единственная точка N из T такая, что* $\overrightarrow{MN} = \vec{x}$. *Мы говорим, что точка N получена из M откладыванием вектора* $\vec{x}$ *и записываем*

$$N = M + \vec{x}.$$

3. *Для любых трех точек M, N, P из T выполняется правило треугольника:*

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}. \tag{6.1}$$

Векторы из линейного пространства V называют *свободными векторами* точечного пространства T. Если размерность V равна n – $\dim V = n$, то и T называют *n-мерным точечным пространством*, или просто *n-мерным пространством*.

Если фиксировать точку $O \in T$ (O – начальная точка) и откладывать от нее всевозможные векторы $\overrightarrow{OM}$, которые называют *радиус-векторами*, то получим линейное пространство, которое тождественно пространству V. Поскольку любую точку $M \in T$ можно получить, откладывая некоторый вектор $\vec{x}$ от точки O, то в некотором смысле можно отождествить пространства T и V.

Вот некоторые следствия из аксиом точечного пространства.

1. *Для любой точки* $M \in T$ *выполняется равенство*

$$\overrightarrow{MM} = \vec{0}.$$

Действительно, положим в равенстве (6.1) $N = M$ и воспользуемся единственностью нулевого элемента.

2. *Для любых точек M и N из T выполняется равенство*

$$\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}.$$

Для доказательства достаточно положить в равенстве (6.1) $P = M$.

Примеры. 1. Простейшим примером двумерного точечного пространства может служить плоскость в школьном курсе планиметрии с обычными операциями над векторами.

2. Рассмотрим теперь n-мерное точечное пространство, ассоциированное с векторным пространством $\mathbb{R}^n$.

Арифметическое точечное пространство

Точками в этом пространстве будут упорядоченные последовательности из n чисел $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Для любых двух точек $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ вектор $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^n$ имеет координаты

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n). \tag{6.2}$$

Чтобы отложить вектор $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ от точки $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и получить точку B, достаточно к координатам точки A прибавить одноименные координаты вектора $\vec{p}$

$$B = A + \vec{p} = (a_1 + p_1, a_2 + p_2, \ldots, a_n + p_n).$$

Легко видеть, что это определение согласуется с равенством (6.2).

Наконец, выполняется и аксиома 3, что следует из такого утверждения.

Предложение. *Для любых трех точек A, B, C выполняется равенство*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Доказательство. По определению

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n), \quad \overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2, \ldots, c_n - b_n),$$

поэтому

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$$
$$= ((b_1 - a_1) + (c_1 - b_1), (b_2 - a_2) + (c_2 - b_2), \ldots, (b_n - a_n) + (c_n - b_n)) =$$
$$= (c_1 - a_1, c_2 - a_2, \ldots, c_n - a_n) = \overrightarrow{AC}.$$

Таким образом, мы видим, что выполняются все аксиомы точечного пространства. Полученное пространство называют *n-мерным арифметическим точечным пространством*. В каком-то смысле любое n-мерное точечное пространство можно отождествить с рассмотренным примером. Как это сделать, мы покажем в следующем параграфе.

§ 6.2. Координаты в конечномерном точечном пространстве

В школьном курсе мы используем понятие прямоугольной декартовой системы координат. Некоторым ее обобщением является *косоугольная* система координат, которая описывается следующим образом: на плоскости задаются точка O (начало координат) и базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Тогда для любой точки M на плоскости можно записать разложение радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ по выбранному базису

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 .$$

Мы полагаем координаты точки M равными x_1, x_2 и пишем $M(x_1, x_2)$.

Теперь мы хотим ввести аналог косоугольной системы координат в произвольном n-мерном точечном пространстве T. По установившейся традиции такие системы координат называются *аффинными*.

Определение. ***Аффинная система координат*** *в точечном пространстве T, ассоциированном с векторным пространством V, задается набором $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, состоящим из точки O, называемой началом координат, и некоторого базиса пространства V.*

Координатами точки M в данной системе координат называют координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n \qquad (6.3)$$

и записывают коротко так: $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (рис. 6.2).

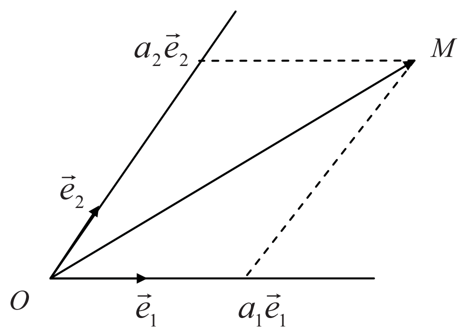

Рис. 6.2

Предложение. *В аффинной системе координат для любых точек* $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $N(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *координаты вектора* $\overrightarrow{MN}$ *в базисе* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *находятся по правилу*

$$\overrightarrow{MN} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n),$$

т.е. чтобы найти координаты вектора, надо из координат конечной точки вычесть координаты начальной.

Доказательство. Имеем

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON},$$

так что

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) - (a_1, a_2, \ldots, a_n) =$$
$$= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n).$$

Особый интерес представляет возможность производить замену системы координат в n-мерном пространстве, при которой меняется как начало координат, так и базис в линейном пространстве V. Пусть в точечном пространстве T даны две системы координат $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ и $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n\}$, причем $O'(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ – координаты нового начала координат в старом базисе и P – матрица перехода от базиса $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ к базису $E' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n)$, т.е.

$$E' = EP.$$

Пусть $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $M(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ соответственно координаты точки M в исходном и новом базисах. Найдем выражение старых координат через новые. Имеем

$$\overrightarrow{OO'} = s_1\vec{e}_1 + s_2\vec{e}_2 + \ldots + s_n\vec{e}_n, \tag{6.4}$$

$$\overrightarrow{OM} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n, \tag{6.5}$$

$$\overrightarrow{O'M} = a'_1\vec{e}'_1 + a'_2\vec{e}'_2 + \ldots + a'_n\vec{e}'_n. \tag{6.6}$$

Для краткости перепишем соотношения (6.4) – (6.6) в матричном виде, полагая для вектора $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ вектор-столбец X, составленный из координат $\vec{x}$: $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Тогда формулы (6.4) – (6.6) перепишутся так:

$$\overrightarrow{OO'} = ES, \tag{6.7}$$

$$\overrightarrow{OM} = EA, \tag{6.8}$$

$$\overrightarrow{O'M} = E'A'. \tag{6.9}$$

Подставляя (6.7) –(6.9) в равенство треугольника $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, получим

$$EA = ES + E'A' = ES + EPA' = E\left(S + PA'\right).$$

Поскольку координаты вектора определены в данном базисе однозначно, выражение старых координат точки M через новые в матричной записи выглядит следующим образом:

$$A = S + PA', \tag{6.10}$$

соответственно в векторной записи:

$$\vec{a} = \vec{s} + P\vec{a}' \tag{6.11}$$

или в подробной записи

$$\begin{cases} a_1 = s_1 + p_{11}a_1' + p_{12}a_2' + \ldots + p_{1n}a_n', \\ a_2 = s_2 + p_{21}a_1' + p_{22}a_2' + \ldots + p_{2n}a_n', \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_n = s_n + p_{n1}a_1' + p_{n2}a_2' + \ldots + p_{nn}a_n'. \end{cases} \tag{6.12}$$

Если мы хотим получить выражение новых координат через старые, то достаточно разрешить соотношение (6.11) относительно $\vec{a}'$ (заметим, что матрица P невырожденная):

$$\vec{a}' = -P^{-1}\vec{s} + P^{-1}\vec{a}. \tag{6.13}$$

§ 6.3. Прямая в *n*-мерном пространстве. Отрезок

Мы по-прежнему находимся в точечном пространстве T, ассоциированном с n-мерным векторным пространством V.

Определение. *Пусть A – фиксированная точка из T и $\vec{p}$ – фиксированный вектор из V, отличный от $\vec{0}$. Множество точек X вида*

$$X = A + t\vec{p}, \tag{6.14}$$

где t – любое число, называется ***прямой, проходящей через точку** A **по направлению вектора*** $\vec{p}$, *или просто* ***прямой***.

Иллюстрацией в трехмерном пространстве служит рис. 6.3.

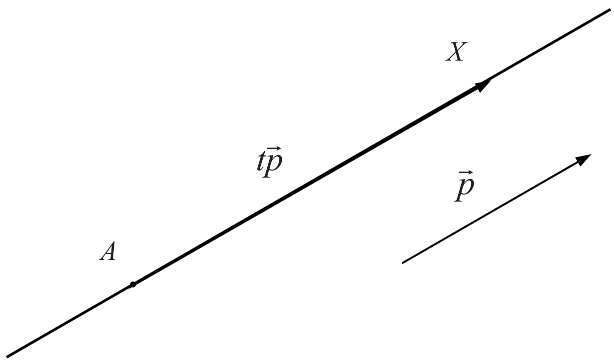

Рис. 6.3

Если в n-мерном пространстве T выбрана система координат и $A(a_1, ..., a_n)$, $X(x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, то равенство (6.14) запишется в виде набора равенств

$$x_1 = a_1 + tp_1, \ldots, x_n = a_n + tp_n. \tag{6.15}$$

Равенства (6.15) называют *параметрическими уравнениями* прямой (t *– параметр,* $t \in (-\infty, \infty)$), вектор $\vec{p}$ *– направляющим вектором* прямой.

Определение. *Пусть A и B – две точки из T.* ***Отрезком** AB назовем множество точек X вида*

$$X = A + t\overrightarrow{AB}, \tag{6.16}$$

где t принимает любое значение из промежутка $[0, 1]$.

Таким образом, отрезок AB есть часть прямой, когда в качестве направляющего вектора берется вектор $\overrightarrow{AB}$, а t изменяется только от 0 до 1 (рис. 6.4).

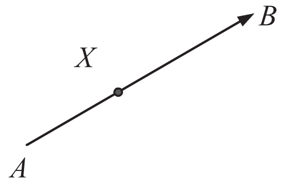

Рис. 6.4

Теорема 6.1. *Отрезок AB состоит из точек X, для которых справедливо равенство*

$$\overrightarrow{OX} = s\overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{OB}, \tag{6.17}$$

где s – любое число из [0, 1].

Доказательство. Из (6.16) имеем $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$, откуда следует

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OA} + t\left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}\right) = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OX}.$$

Полагая $1 - t = s$, приходим к (6.17), где $s \in [0, 1]$.

§ 6.4. Различные виды плоскостей в *n*-мерном пространстве

К числу основных "геометрических" образов в n-мерном пространстве T, кроме прямых, относятся еще и *плоскости.* Однако если при $n = 3$ имеется лишь один вид плоскостей (плоскости в обычном понимании), то при $n > 3$ возможны плоскости различных типов: одномерные, двумерные, трехмерные и т.д. плоскости.

Определение. *Пусть k – натуральное число, A – фиксированная точка в n-мерном пространстве T и* $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_k$ *– набор линейно независимых векторов из линейного пространства V. Множество точек X вида*

$$X = A + t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2 + \ldots + t_k\vec{p}_k, \qquad (6.18)$$

*где t_1, t_2, ..., t_k – любые числа, называется **k-мерной плоскостью** в T.*

Замечание. Нетрудно видеть, что k-мерную плоскость можно определить, так же как множество точек вида $A + \vec{w}$, где вектор $\vec{w}$ берется из k-мерного подпространства W линейного пространства V, или, короче, $A + W$. Иными словами, k-мерная плоскость – это *сдвинутое подпространство* в том смысле, как это понятие определялось в гл. 1. Выбирая систему координат в n-мерном пространстве T, k-мерную плоскость можно отождествить с множеством решений некоторой неоднородной системы линейных уравнений.

К этому определению мы могли бы с самого начала добавить условие $k \le n$. Действительно, в n-мерном векторном пространстве V просто не существует линейно независимых систем векторов с числом векторов, большим, чем n. Случай $k = n$ тоже не интересен, так как n-мерная плоскость совпадает со всем пространством T. Действительно, если $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ – линейно независимая система векторов в V, то это базис в V, и поэтому любой вектор $\vec{p} \in V$ может быть представлен в виде $t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2 + \ldots + t_n\vec{p}_n$. Но тогда имеем $X = A + \vec{p}$, где $\vec{p}$ – любой вектор из V, т.е. X может быть любой точкой из T.

Итак, в определении k-мерной плоскости в T можно считать $1 \le k \le n - 1$.

Особое значение имеют два вида плоскостей: одномерные ($k = 1$) и ($n - 1$)-мерные ($k = n - 1$), т.е. плоскости минимально возможной размерности и плоскости максимально возможной размерности. Одномерные плоскости – это, очевидно, прямые в T. Плоскости размерности $n - 1$ носят название *гиперплоскостей.*

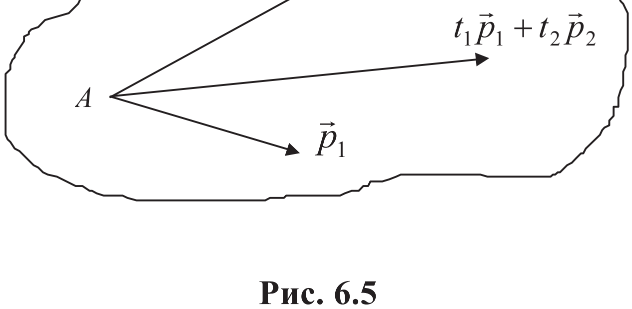

Рис. 6.5

Гиперплоскости в трехмерном пространстве – это обычные плоскости (рис. 6.5). Но мы привыкли к тому, что плоскость в трехмерном пространстве задается уравнением вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0$$

(координаты обозначены x_1, x_2, x_3, а не x, y, z, как обычно). Будет ли верно то же самое при любом $n > 3$? Оказывается, да.

Теорема 6.2. *Любая гиперплоскость в n-мерном пространстве T состоит из точек $X(x_1, x_2, ..., x_n)$, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению первой степени*:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + b = 0,$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ и b – фиксированные числа, причем не все $c_1, c_2, ..., c_n$ равны нулю.

Доказательство. Проведем его для случая $n = 3$, при $n > 3$ рассуждения аналогичны. Итак, пусть Г – гиперплоскость в трехмерном пространстве, т.е. множество точек X вида

$$X = A + t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2, \tag{6.19}$$

где векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ линейно независимы. Переписав равенство (6.19) в виде

$$\overrightarrow{AX} = t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2,$$

видим, что векторы $\overrightarrow{AX}, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ линейно зависимы. Но условием зависимости трех векторов в $\mathbb{R}^3$ является, как мы знаем, равенство нулю определителя, составленного из координат этих векторов. Полагая $A(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{p}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\vec{p}_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, можем, следовательно, записать

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{6.20}$$

или

$$(x_1 - a_1)c_1 + (x_2 - a_2)c_2 + (x_3 - a_3)c_3 = 0, \qquad (6.21)$$

где

$$c_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix},\ c_2 = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix},\ c_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая скобки в (6.21), приходим к уравнению

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + b = 0,$$

(где $b = -c_1a_1 - c_2a_2 - c_3a_3$), что и требовалось получить.

§ 6.5. Геометрические объекты на плоскости и в пространстве

Всюду в § 6.5 предполагается, что в рассматриваемом точечном пространстве (на плоскости или в обычном пространстве) фиксирована система координат с началом в точке O. Рассматривая точки на плоскости, будем в § 6.5 обозначать их координаты не x_1 и x_2, как делали это до сих пор, а x и y, что больше соответствует школьным обозначениям. Аналогично точки в пространстве будем обозначать, как правило, $M(x, y, z)$.

К числу основных геометрических объектов на плоскости относятся, безусловно, прямые. В соответствии с общим определением прямая на плоскости – это множество точек, координаты которых задаются в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = a_0 + pt, \\ y = b_0 + qt, \end{cases} \qquad (6.22)$$

где (a_0, b_0) – некоторая точка, (p, q) – ненулевой вектор, t – параметр (любое число).

Параметрические уравнения (6.22) прямой легко свести к уравнению

$$Ax + By + C = 0, \qquad (6.23)$$

непосредственно связывающему координаты x и y. Для этой цели следует выбрать одно из уравнений (6.22), в котором коэффициент при параметре t не равен нулю, выразить t и подставить его в другое уравнение.

Уравнение (6.23) называют *общим уравнением прямой*. Разумеется, в этом уравнении хотя бы один из коэффициентов A или B должен быть отличен от нуля.

Обратимся теперь к рассмотрению геометрии в трехмерном пространстве. Основные геометрические объекты в пространстве – это прямые и плоскости. Согласно § 6.3 прямая задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a_0 + pt, \\ y = b_0 + qt, \\ z = c_0 + rt, \end{cases} \tag{6.24}$$

где $(a_0,\ b_0,\ c_0)$ – некоторая точка, $(p,\ q,\ r)$ – ненулевой вектор, а $t \in \mathbb{R}$; плоскость задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a_0 + p_1t_1 + p_2t_2, \\ y = b_0 + q_1t_1 + q_2t_2, \\ z = c_0 + r_1t_1 + r_2t_2, \end{cases} \tag{6.25}$$

где векторы $\vec{a} = (p_1, q_1, r_1)$ и $\vec{b} = (p_2, q_2, r_2)$ линейно независимы (неколлинеарны), а t_1, t_2 – любые числа. Ранее было установлено, что плоскость можно задать уравнением первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{6.26}$$

а прямую – системой из двух уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{6.27}$$

где $(A_1,\ B_1,\ C_1)$ и $(A_2,\ B_2,\ C_2)$ – два неколлинеарных вектора. Задание прямой с помощью системы (6.27) означает, что прямая рассматривается как линия пересечения двух непараллельных плоскостей.

Отметим следующие факты.

1. Если прямая задана параметрическими уравнениями (6.24), то вектор $\vec{a}=(p,q,r)$ параллелен данной прямой. Доказательство очевидно. Заметим, что любой вектор, параллельный данной прямой, называют *направляющим вектором* прямой.

2. Если плоскость задана параметрическими уравнениями (6.25), то оба вектора $\vec{a}=(p_1,q_1,r_1)$ и $\vec{b}=(p_2,q_2,r_2)$ параллельны данной плоскости.

Помимо параметрических уравнений (6.24) и системы (6.27), существует еще одна специальная форма задания прямой в пространстве, называемая *каноническими уравнениями прямой*.

Пусть прямая l задана точкой $A(a_0, b_0, c_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}=(p,q,r)$. Составим ее уравнения.

Если точка $M = (x, y, z)$ принадлежит l, то вектор $\overrightarrow{AM}$ коллинеарен $\vec{a}$. Это записывается с помощью равенств

$$\frac{x-a_0}{p}=\frac{y-b_0}{q}=\frac{z-c_0}{r}. \qquad (6.28)$$

Уравнения (6.28) называются *каноническими уравнениями* прямой l. В действительности уравнения (6.28) представляют собой систему из двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-a_0}{p}=\dfrac{y-b_0}{q}, \\ \dfrac{x-a_0}{p}=\dfrac{z-c_0}{r}, \end{cases}$$

каждое из которых определяет плоскость (первая из плоскостей параллельна оси z, вторая – оси y).

Обратимся теперь к плоскостям в пространстве. Существуют некоторые специальные формы задания плоскости в пространстве. Рассмотрим их.

1. *Уравнение плоскости, проходящей через данную точку* $A=(a_0,b_0,c_0)$ *и параллельной двум данным векторам* $\vec{a}=(p_1,q_1,r_1)$, $\vec{b}=(p_2,q_2,r_2)$.

Если M – произвольная точка искомой плоскости, то векторы $\overrightarrow{AM}, \vec{a}, \vec{b}$ должны быть компланарны. Это условие записывается в виде равенства

$$\begin{vmatrix} x-a_0 & y-b_0 & z-c_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0,$$

которое и является, таким образом, уравнением искомой плоскости.

2. *Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$, $A_3 = (a_3, b_3, c_3)$.

Поскольку речь идет о плоскости, проходящей через точку A_1 и параллельной векторам $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, то искомое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. *Уравнение плоскости «в отрезках».*

В такой форме может быть записано уравнение любой плоскости, пересекающей все три координатные оси и не проходящей через начало координат. Если a, b, c – отрезки, отсекаемые такой плоскостью на осях (рис. 6.6), то уравнение плоскости будет

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{6.29}$$

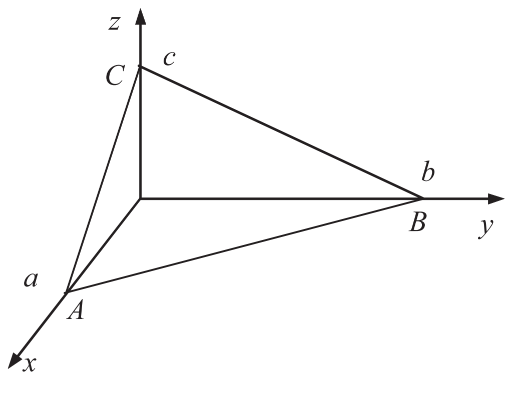

Рис. 6.6

Действительно, непосредственная проверка показывает, что каждая из точек $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ удовлетворяет уравнению (6.29).

Завершим § 6.5 решением вопроса о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве. Пусть прямая l задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a_0 + pt, \\ y = b_0 + qt, \\ z = c_0 + rt, \end{cases} \tag{6.30}$$

а плоскость П – ее общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{6.31}$$

Мы должны ответить на вопрос, сколько общих точек имеется у прямой l и плоскости П: ни одной (l параллельна П), одна (l пересекает П) или бесконечное множество (l лежит в плоскости П).

Подставляя в (6.31) вместо x, y, z их выражения из (6.30), получим

$$\left(Aa_0 + Bb_0 + Cc_0 + D\right) + \left(Ap + Bq + Cr\right)t = 0,$$

или

$$u + vt = 0, \tag{6.32}$$

где u и v обозначают суммы, заключенные в скобки.

Если $u = v = 0$, то любое значение t удовлетворяет уравнению (6.32) – прямая l лежит в плоскости П.

Если $v = 0$, $u \neq 0$, то уравнение (6.32) не имеет решений – прямая l параллельна плоскости П.

Если $v \neq 0$, то уравнение (6.32) имеет единственное решение – прямая l пересекает плоскость П.

§ 6.6. Точечные евклидовы пространства

Определение. *Точечное пространство T, ассоциированное с векторным пространством V, называют* ***евклидовым****, если V – евклидово линейное пространство.*

Особую роль играет *n-мерное арифметическое точечное пространство T*, ассоциированное с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением векторов

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n .$$

Введение структуры евклидова пространства на $\mathbb{R}^n$ позволяет определить расстояние между точками и углы между прямыми.

Определение. ***Расстояние*** *$|AB|$ между двумя точками A и B полагается равным модулю вектора $\overrightarrow{AB}$:*

$$|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right|. \tag{6.33}$$

Определение. ***Угол*** *между прямыми l_1 и l_2 с направляющими векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ полагается равным углу между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ и вычисляется по формуле*

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}. \tag{6.34}$$

В евклидовом пространстве можно ввести понятие *прямоугольной системы координат*.

Определение. *Систему координат, определяемую набором $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, назовем* ***прямоугольной,*** *или* ***декартовой****, если базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ пространства V выбран ортонормированным.*

Напомним, что в этом случае векторы базиса имеют единичную длину и попарно ортогональны. Координаты точки A в прямоугольной системе координат называют *прямоугольными*, или *декартовыми*. Данное определение полностью соответствует понятию прямоугольной системы координат, которая вводится на плоскости или в пространстве в школьном курсе геометрии (рис. 6.7).

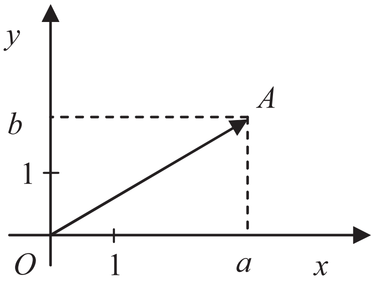

Рис. 6.7

Замечание. Координаты точки A в декартовой системе координат можно найти с помощью скалярного произведения

$$a = \left(\overrightarrow{OA}, \vec{e}_1\right), b = \left(\overrightarrow{OA}, \vec{e}_2\right). \tag{6.35}$$

Формулы замены координат (6.10) сохраняют свой вид с той важной особенностью, что матрица P перехода к новому базису является *ортогональной*, т.е. ее столбцы образуют ортонормированную систему векторов в $\mathbb{R}^n$.

Пример 6.1. Рассмотрим замену координат на плоскости. Формулы (6.12) можно записать таким образом:

$$\begin{cases} x = x_0 + p_{11}x' + p_{12}y', \\ y = y_0 + p_{21}x' + p_{22}y', \end{cases} \tag{6.36}$$

где x_0, y_0 – координаты новой начальной точки и выполняются соотношения:

$$p_{11}^2 + p_{21}^2 = 1,\ p_{12}^2 + p_{22}^2 = 1,\ p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22} = 0. \tag{6.37}$$

Нетрудно показать, что матрицу P можно представить в одном из видов:

$$P = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ или } P = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{6.38}$$

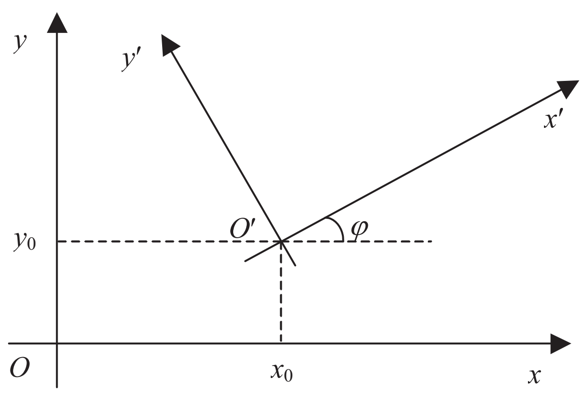

Рис. 6.8

В первом случае формулы (6.36) сводятся к *сдвигу* начала координат в точку $O'(x_0, y_0)$ и *повороту осей* на угол φ (рис. 6.8), во втором – добавляется зеркальное отражение относительно оси $O'x'$ (на рис. 6.8 не показано).

Фиксируем в n-мерном точечном евклидовом пространстве T прямоугольную систему координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Мы можем записать формулы (6.33) и (6.34) для расстояния между точками и угла между прямыми в координатной форме.

Предложение. *Пусть* $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *– две точки из* T. *Тогда*

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}. \tag{6.39}$$

Действительно, поскольку $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$, то формула (6.39) следует из определения модуля вектора.

Предложение. *Пусть* l *и* m *– две прямые в пространстве* T *с направляющими векторами* $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *и* $\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ *соответственно. Тогда угол* φ *между прямыми* l *и* m *вычисляется по формуле*

$$\cos\varphi = \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots p_n^2}\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2}}. \tag{6.40}$$

Поскольку переход от одной прямоугольной системы координат к другой сводится к сдвигу и ортогональному преобразованию, то обе формулы (6.39), (6.40) не зависят от выбора системы координат.

Рассмотрим треугольник ABC. Так же, как и в обычной геометрии на плоскости, выполняется следующий факт.

Неравенство треугольника.

$$|AC| \le |AB| + |BC|. \tag{6.41}$$

Доказательство. Полагая $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, имеем $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Неравенство (6.41) приобретает вид

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$$

и в таком виде было доказано в гл. 1 формула (1.29).

Если треугольник ACB прямоугольный, т.е. угол C прямой, или, иными словами, векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ ортогональны, то справедлива следующая теорема.

Теорема 6.3 (Пифагора). *В прямоугольном треугольнике ACB квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*:

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2. \tag{6.42}$$

Доказательство. Применим свойство 4 из § 1.5 гл. 1: для ортогональных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$. Положим $\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{CA},$ тогда $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{BA}.$ Поскольку $|CA| = |AC|, |BA| = |AB|,$ то получим (6.42).

§ 6.7. Расстояние от точки до гиперплоскости

Пусть в пространстве T гиперплоскость Г задана уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0. \tag{6.43}$$

Рассмотрим *вектор нормали*

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

составленный из коэффициентов при неизвестных в уравнении (6.43).

Установим следующие факты, оправдывающие это название.

Вектор нормали гиперплоскости $\vec{a}$ *ортогонален гиперплоскости* Г *в том смысле, что* $\vec{a}$ *ортогонален любому вектору* $\overrightarrow{PQ}$, *где P и Q – какие угодно точки, принадлежащие* Г.

Любой вектор, ортогональный Г, *коллинеарен вектору нормали* $\vec{a}$.

Действительно, пусть точки $P=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ принадлежат Г. Это означает, что выполняются равенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0,$$
$$a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n + b = 0.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим

$$a_1(y_1 - x_1) + a_2(y_2 - x_2) + \ldots + a_n(y_n - x_n) = 0,$$

что означает ортогональность векторов $\vec{a}$ и $\overrightarrow{PQ}$. Этим доказано первое утверждение.

Докажем второе утверждение. Пусть $P \in$ Г фиксированная точка, а точка Q пробегает все Г. Тогда всевозможные векторы $\overrightarrow{PQ}$ будут образовывать некоторое подпространство П размерности $n - 1$ (это вытекает из определения гиперплоскости как «сдвинутого» подпространства размерности $n - 1$). Но тогда существует с точностью до пропорциональности только один вектор, ортогональный П. Таким вектором, как мы уже знаем, является вектор нормали $\vec{a}$.

Определение. *Пусть M – точка пространства T.* ***Проекцией*** *M на гиперплоскость* Г *называется такая точка $P \in$* Г, *что вектор $\overrightarrow{PM}$ ортогонален* Г (рис. 6.9).

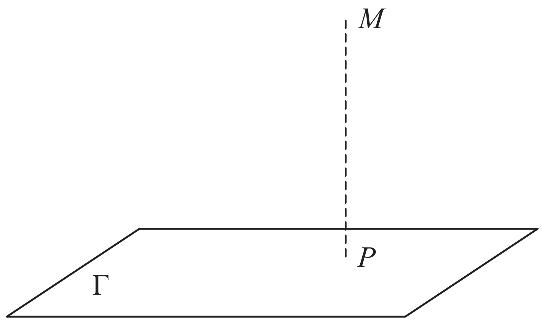

Рис. 6.9

Теорема 6.4. *Проекция точки M на гиперплоскость* Г *всегда существует; при этом расстояние от точки M до ее проекции P меньше расстояния от точки M до любой другой точки Q гиперплоскости.*

Доказательство. Пусть $M = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ и $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки *M*. Постараемся подобрать такое число *t*, чтобы точка $P = M + t\vec{a} \in \Gamma$. Тогда будем иметь $\vec{m} + t\vec{a} = \overrightarrow{OP}$, или

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = -t\vec{a}; \tag{6.44}$$

последнее равенство означает, что вектор $\overrightarrow{PM}$ коллинеарен $\vec{a}$ и, следовательно, ортогонален Г.

Соотношение $\vec{m} + t\vec{a} \in \Gamma$ означает, что

$$a_1\left(x_1^0 + ta_1\right) + a_2\left(x_2^0 + ta_2\right) + \ldots + a_n\left(x_n^0 + ta_n\right) + b = 0,$$

или

$$a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \ldots + a_nx_n^0 + b = -t\vec{a}^2. \tag{6.45}$$

Ввиду того что вектор $\vec{a} \neq 0$, такое значение *t* обязательно найдется.

Итак, проекция *P* точки *M* на гиперплоскость Г существует. Осталось показать, что

$$|MP| < |MQ|$$

для любой точки $Q \in \Gamma$, отличной от *P*. Но это вытекает из теоремы Пифагора. Действительно, так как вектор $\overrightarrow{MP}$ ортогонален $\overrightarrow{PQ}$, то

$$|MP|^2 + |PQ|^2 = |MQ|^2,$$

и поскольку $|PQ| \neq 0$ (точки *P* и *Q* различны), то $|MP| < |MQ|$. Теорема доказана.

Длина вектора $\overrightarrow{MP}$, где *P* – проекция точки *M* на гиперплоскость Г, называется *расстоянием от точки M до гиперплоскости* Г. Формулы (6.44) и (6.45) позволяют найти это расстояние: из (6.44) следует

$$|MP| = |t||\vec{a}|;$$

подставляя сюда значение *t* из (6.45), получим

$$|MP| = \frac{\left|a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \ldots a_nx_n^0 + b\right|}{|\vec{a}|}. \tag{6.46}$$

Формула (6.46) означает: *чтобы найти расстояние от точки М до гиперплоскости* Г, *заданной уравнением* (6.43), *следует подставить координаты точки М в левую часть уравнения* (6.43) *и разделить модуль полученного числа на модуль нормального вектора*.

§ 6.8. Выпуклые множества. Полупространство как выпуклое множество

Мы продолжаем знакомство с геометрией арифметических точечных пространств. Среди различных понятий, связанных с n-мерным точечным пространством T, важную роль в приложениях (особенно экономических) играет понятие выпуклого множества.

Определение. *Множество $M \subset T$ называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя точками A и B оно содержит весь отрезок AB.*

Рис. 6.10 иллюстрирует различие между выпуклыми и невыпуклыми множествами на обычной плоскости.

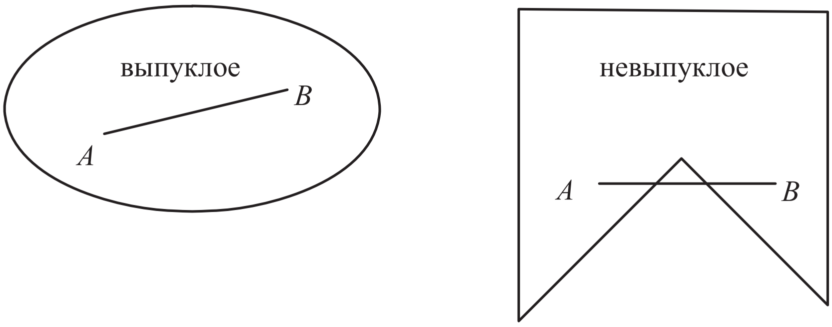

Рис. 6.10

Наиболее важным примером выпуклого множества в n-мерном пространстве T является полупространство.

Определение. ***Полупространством** в n-мерном пространстве T называется множество всех точек $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, координаты которых удовлетворяют заданному неравенству первой степени*:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b \geq 0, \tag{6.47}$$

где a_1, ..., a_n, b – фиксированные числа, причем a_1, ..., a_n не все равны нулю.

Теорема 6.5. *Любое полупространство есть выпуклое множество.*

Доказательство. Пусть полупространство П задано с помощью неравенства (6.47). Рассмотрим какие-либо две точки $P = (p_1, \ldots, p_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ из П. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что любая точка X отрезка PQ принадлежит П.

По теореме 6.1 имеем

$$\overrightarrow{OX} = s\overrightarrow{OP} + (1-s)\overrightarrow{OQ}, \quad s \in [0, 1].$$

Будем писать просто

$$X = sP + (1-s)Q.$$

Это равенство запишется в координатах следующим образом:

$$x_1 = sp_1 + (1-s)q_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = sp_n + (1-s)q_n.$$

Подставляя эти выражения в левую часть (6.47), получим

$$a_1(sp_1 + (1-s)q_1) + \ldots + a_n(sp_n + (1-s)q_n) + b =$$
$$= s(a_1p_1 + \ldots + a_np_n + b) + (1-s)(a_1q_1 + \ldots + a_nq_n + b).$$

Так как обе суммы, заключенные в скобки, неотрицательны (ведь $P \in$ П и $Q \in$ П), то выполняется неравенство (6.47), т.е. $X \in$ П.

Для дальнейшего нам понадобится лемма.

Лемма. *Пересечение нескольких выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

Действительно, пусть $M = M_1 \cap M_2$, где M_1, M_2 – выпуклы. Докажем выпуклость M.

Пусть $A \in M$ и $B \in M$. Тогда $A \in M_1$ и $B \in M_1$. Так как M_1 выпуклое, то это означает, что отрезок AB содержится в M_1. Аналогично покажем, что AB содержится в M_2. Значит, AB содержится в M, что означает выпуклость M.

Из леммы следует, что пересечение нескольких полупространств в n-мерном пространстве T является выпуклым множеством.

Определение. *Пересечение M нескольких полупространств называется* ***выпуклой многогранной областью****. Иначе говоря, выпуклая многогранная область задается с помощью системы из нескольких линейных неравенств.*

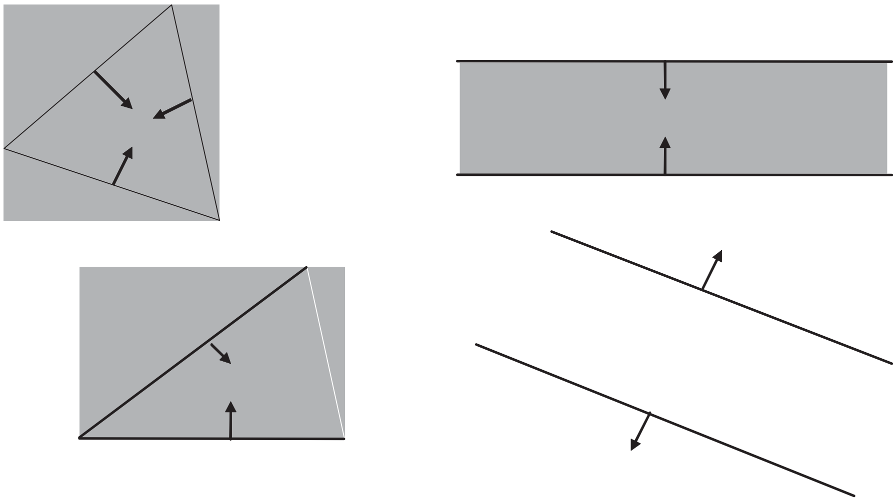

Рис. 6.11

На рис. 6.11 изображены примеры выпуклых многогранных областей на обычной плоскости. В этом случае вместо "многогранных" более естественно говорить "многоугольных".

Замечание. Любая гиперплоскость есть выпуклое множество: это следует из того, что уравнение $a_1x_1 + ... + a_nx_n + b = 0$ равносильно системе из двух неравенств:

$$\begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b \geq 0, \\ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b \leq 0. \end{cases}$$

Определение. *Ограниченная выпуклая многогранная область M в n-мерном пространстве T называется* ***выпуклым многогранником****.*

Отметим, что множество $P \subset T$ называется *ограниченным*, если существует такое положительное число c, что координаты любой точки X из P по модулю не превосходят c:

$$|x_1| \le c, \ |x_2| \le c, \ \ldots, \ |x_n| \le c.$$

§ 6.9. Угловые точки выпуклых многогранных областей

Рассмотрим выпуклую многоугольную область на плоскости. Как правило, такие области имеют вершины или, по-другому, угловые точки. Несмотря на интуитивную ясность понятия *вершины*, постараемся выяснить точный смысл этого понятия.

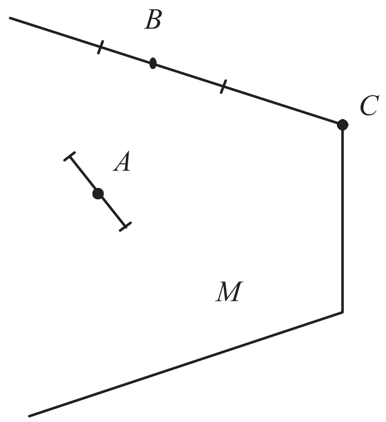

Рис. 6.12

Для области M, изображенной на рис. 6.12, точки A и B не являются вершинами. Это находит свое выражение в том, что для каждой из этих точек имеется отрезок, проходящий через эту точку и целиком содержащийся в M. В то же время для вершины C такого отрезка найти нельзя. Это наводит на мысль о следующем определении.

Определение. *Точка C выпуклой многогранной области $M \subset T$ называется* ***вершиной****, или* ***угловой точкой****, области M, если не существует представления C в виде*

$$C = sC_1 + (1 - s)C_2,$$

где $C_1 \in M$, $C_2 \in M$ и $0 < s < 1$.

Возникает вопрос о практическом способе нахождения вершин. Непосредственно ясно, что в случае многоугольной области на плоскости для любой вершины C найдутся две граничные прямые, проходящие через C, для которых C является их единственной общей точкой, а в случае выпуклой многогранной области в трехмерном пространстве для любой вершины C найдутся три граничные плоскости с единственной общей точкой C (на рис. 6.13 через вершину C пирамиды M проходят четыре граничные плоскости, но любых трех из них достаточно, чтобы точка C была их единственной общей точкой).

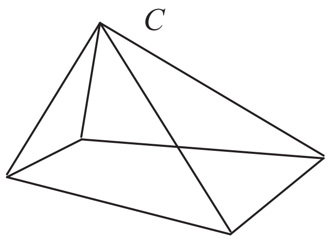

Рис. 6.13

Отсюда напрашивается следующий способ нахождения вершин.

Способ нахождения вершин выпуклой многогранной области

Пусть область $M \subset T$ задана с помощью системы линейных неравенств с n неизвестными. Выберем какие-либо n из этих неравенств и заменим их равенствами. Получим систему из n линейных уравнений с n неизвестными. Если эта система имеет единственное решение X, причем $X \in M$, то X – вершина области M. Таким путем могут быть получены все вершины M.

Установим сначала такую лемму.

Лемма. *Пусть* Π – *полупространство с граничной гиперплоскостью* Γ *и пусть некоторый отрезок AB целиком принадлежит* Π. *Тогда имеет место одна из трех возможностей* (рис. 6.14):

а) *все точки отрезка принадлежат* Γ;

б) *ни одна из точек отрезка не принадлежит* Γ;

в) *один из концов отрезка принадлежит* Γ, *а все остальные точки отрезка не принадлежат* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть П задается неравенством $(c, x) \geq b$, а Г – уравнением $(c, x) = b$. Если обе точки A, B принадлежат Г, то и весь отрезок AB в силу выпуклости Г также принадлежит Г.

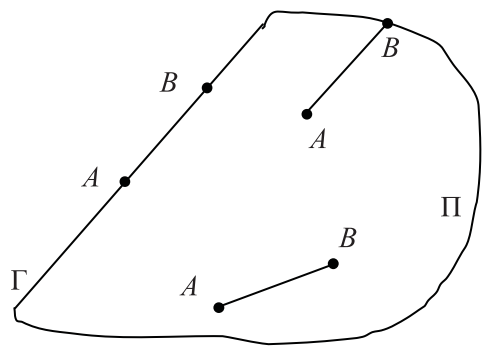

Рис. 6.14

Если $A \in Г$ и $B \notin Г$, то $(c, A) = b$, $(c, B) > b$. Тогда для любой точки $C \in AB$, отличной от A, имеем $C = tA + (1 - t)B$, где $t \in [0, 1)$. Следовательно, $(c, C) = t(c, A) + (1 - t)(c, B) > tb + (1 - t)b = b$, т.е. C не принадлежит Г.

Наконец, если $A \notin Г$, $B \notin Г$, то $(c, A) > b$ и $(c, B) > b$, откуда следует, что для любой точки C отрезка AB будет $(c, C) = t(c, A) + (1 - t)(c, B) > b$ для всех $t \in [0, 1]$, т.е. ни одна из точек отрезка не принадлежит Г, что завершает доказательство.

Как следствие леммы получаем утверждение, что *если отрезок содержится в* П, *причем некоторая внутренняя точка A отрезка принадлежит* Г, *то и весь отрезок содержится в* Г.

Перейдем теперь непосредственно к обоснованию указанного ранее способа нахождения вершин выпуклой многогранной области M.

Пусть выпуклая многогранная область $M \subset T$ задается некоторой системой S линейных неравенств. Если C – некоторая точка, то по отношению к ней система S распадается на две части: S_1 – неравенства, которые в точке C обращаются в равенства, и S_2 – неравенства, которые в точке C обращаются в *строгие* неравенства. При этом легко видеть, что если отрезок AB, содержащий точку C, достаточно мал, то для всех точек этого отрезка неравенства из S_2 остаются строгими.

Пусть C – вершина M. Тогда не существует отрезка AB, для которого C – внутренняя точка, такого, что все точки отрезка удовлетворяют системе S_1: в противном случае все точки отрезка (при условии его малости) удовлетворяли бы не только S_1, но и S_2, т.е. мы имели бы $AB \subset M$ вопреки определению вершины. Отсюда следует, что множество решений системы S_1 состоит из *единственной* точки (множество решений системы S_1 есть некоторая плоскость Π в T; если эта плоскость содержит более одной точки, то $\dim \Pi > 0$, а тогда наряду с точкой C плоскость Π должна содержать и целую прямую, проходящую через C). Отсюда получаем, что C есть принадлежащее области M единственное решение некоторой системы уравнений, отвечающих каким-то неравенствам из S.

Теперь остается лишь добавить, что если линейная система $m \times n$ (m уравнений с n неизвестными) имеет единственное решение, то $m \geq n$ и из данной системы можно выделить подсистему $n \times n$ с тем же единственным решением. Это следует из метода Гаусса (предоставляем читателю убедиться в этом самостоятельно).

Обратно, пусть точка $C \subset M$ является единственным решением системы S' из n уравнений, отвечающих каким-то n неравенствам из S. Покажем, что C – вершина M. Если бы это было не так, то нашелся бы отрезок AB, все точки которого удовлетворяют системе S, причем C – внутренняя точка этого отрезка. Согласно уже отмеченному следствию из леммы, все точки такого отрезка должны удовлетворять системе S', что противоречит единственности решения S'.

Пример 6.2. Область M на плоскости задана системой

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \leq 60, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 60, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Найти вершины M.

Решение. Заменяя каждую пару неравенств уравнениями, получаем шесть систем:

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 = 60, \\ 4x_1 + 5x_2 = 60; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 10x_2 = 60, \\ x_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 10x_2 = 60, \\ x_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 60, \\ x_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 60, \\ x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Каждая из этих систем имеет единственное решение

$$(12,\ 12/5),\ (0,\ 6),\ (20,\ 0),\ (0,\ 12),\ (15,\ 0),\ (0,\ 0),$$

однако из шести полученных точек две не принадлежат M: (20, 0) и (0, 12). Остальные четыре точки (12, 12/5), (0, 6), (15, 0), (0, 0) – вершины M. Изображение области M дано на рис. 6.15.

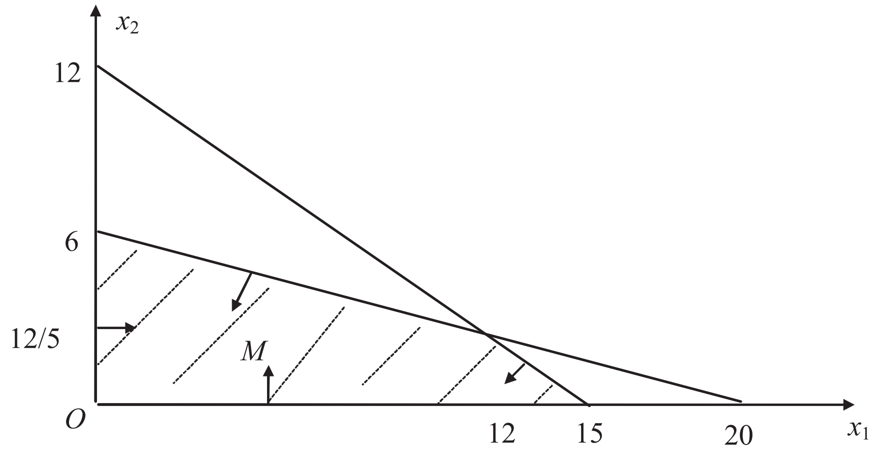

Рис. 6.15

§ 6.10. Выпуклая оболочка системы точек

Представим себе, что в плоскость, имеющую вид бесконечного листа фанеры, в некоторых точках A_1, A_2, ..., A_p забиты колышки. Если резиновой петлей охватить все колышки, то получим многоугольную область с вершинами в некоторых из точек A_1, A_2, ..., A_p, которая на рис. 6.16 отмечена штриховкой. Эта область называется *выпуклой оболочкой* системы точек A_1, A_2, ..., A_p.

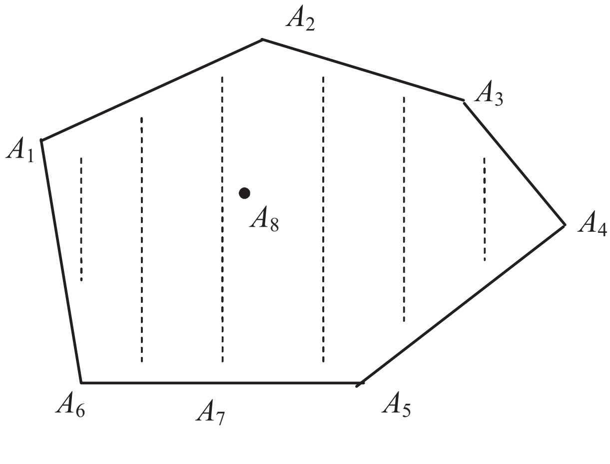

Рис. 6.16

Дадим теперь строгое определение выпуклой оболочки.

Определение. *Пусть A_1, A_2, ..., A_p – некоторый набор точек из n-мерного пространства T. Любая точка A вида*

$$A = s_1A_1 + s_2A_2 + ... + s_pA_p,$$

где $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, ..., $s_p \geq 0$, $s_1+s_2+...+s_p=1$, *называется* ***выпуклой линейной комбинацией*** *точек A_1, A_2, ..., A_p.*

Определение. *Множество всех выпуклых линейных комбинаций точек A_1, A_2, ..., A_p называется* ***выпуклой оболочкой*** *системы точек A_1, A_2, ..., A_p и обозначается*

$$<A_1, A_2, ..., A_p>$$

(*другое обозначение*: conv(A_1, A_2, ..., A_p) *от английского слова "convex" – выпуклый*).

Следующая теорема показывает, что данное ранее определение вполне согласуется с наглядным представлением о выпуклой оболочке.

Теорема 6.6. *Множество $L = <A_1, A_2, ..., A_p>$ есть наименьшее из всех выпуклых множеств, содержащих точки A_1, A_2, ..., A_p.*

Доказательство. Нам необходимо доказать три утверждения.

1. L содержит каждую из точек A_1, A_2, ..., A_p.

2. L выпукло.

3. Каково бы ни было выпуклое множество M, содержащее каждую из точек A_1, A_2, ..., A_p, справедливо включение $L \subset M$.

Утверждение 1 очевидно, поскольку $A_1=1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + ... + 0 \cdot A_p$, откуда следует $A_1 \in L$; аналогично и $A_2 \in L$, ..., $A_p \in L$.

Докажем утверждение 2. При этом для сокращения записей будем считать $p = 3$, т.е. что имеются 3 точки A_1, A_2, A_3. Пусть какие-то точки B и C принадлежат L:

$$B = s_1 A_1 + s_2 A_2 + s_3 A_3,\ C = t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3,$$
$$s_1, s_2, s_3 \geq 0,\ s_1 + s_2 + s_3 = 1,$$
$$t_1, t_2, t_3 \geq 0,\ t_1 + t_2 + t_3 = 1.$$

Любая точка X отрезка BC имеет вид $X = sB + tC$, где $s,\ t \geq 0$, $s + t = 1$. Отсюда

$$X = s(s_1A_1 + s_2A_2 + s_3A_3) + t(t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3) =$$
$$= (ss_1 + tt_1)A_1 + (ss_2 + tt_2)A_2 + (ss_3 + tt_3)A_3.$$

Коэффициенты при A_1, A_2, A_3 в последнем выражении неотрицательны, а их сумма равна 1:

$$(ss_1 + tt_1) + (ss_2 + tt_2) + (ss_3 + tt_3) = s(s_1 + s_2 + s_3) + t(t_1 + t_2 + t_3) = 1.$$

Следовательно, $X \in L$, что и доказывает выпуклость L.

Докажем утверждение 3. По-прежнему считаем $p = 3$. Пусть M – какое-либо выпуклое множество, содержащее каждую из точек A_1, A_2, A_3.

Рассмотрим любую точку из L:

$$s_1A_1 + s_2A_2 + s_3A_3,\ s_1, s_2, s_3 \geq 0,\ s_1 + s_2 + s_3 = 1.$$

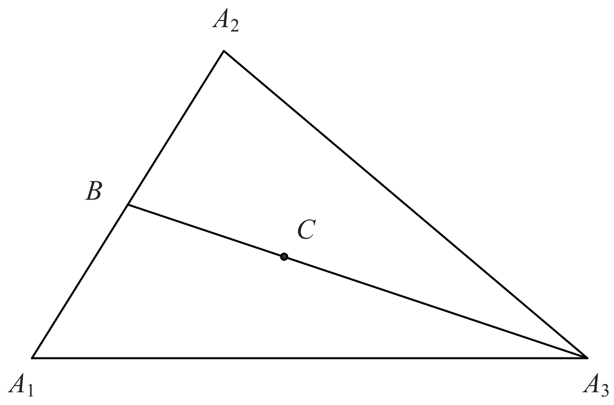

Рис. 6.17

Имеем

$$s_1A_1 + s_2A_2 = (s_1 + s_2)\left(\frac{s_1}{s_1 + s_2}A_1 + \frac{s_2}{s_1 + s_2}A_2\right).$$

Точка $B = \dfrac{s_1}{s_1 + s_2}A_1 + \dfrac{s_1}{s_1 + s_2}A_2$ принадлежит отрезку A_1A_2. Так как M выпуклое множество, то $B \in M$. Далее

$$s_1A_1 + s_2A_2 + s_3A_3 = (s_1 + s_2)B + s_3A_3 =$$
$$= (s_1 + s_2 + s_3)\left(\frac{s_1 + s_2}{s_1 + s_2 + s_3}B + \frac{s_3}{s_1 + s_2 + s_3}A_3\right) = C,$$

где точка C принадлежит отрезку BA_3 и потому $C \in M$.

Мы показали, что любая выпуклая линейная комбинация точек A_1, A_2, A_3 принадлежит M, т.е. что $L \subset M$. Теорема доказана.

Геометрическую иллюстрацию к последней части доказательства теоремы дает рис. 6.17.

Пример 6.3. Предприятие выпускает два вида товаров T_1, T_2. В любой из дней предприятие может работать по одной из трех технологий 1, 2, 3. Пусть $A_i = \left(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}\right)$ – набор товаров, производимых за день работы по i-й технологии (i = 1, 2, 3). Рассмотрим промежуток времени, состоящий из t дней; пусть из них t_1 дней отведено технологии 1, t_2 дней – технологии 2, t_3 дней – технологии 3. Тогда набор B товаров, произведенных за промежуток t, будет

$$B = t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3 = \frac{t_1}{t}B_1 + \frac{t_2}{t}B_2 + \frac{t_3}{t}B_3,$$

где $B_i = tA_i$ (i = 1, 2, 3).

Мы видим, что точка B есть выпуклая линейная комбинация точек B_1, B_2, B_3. Следовательно, множество всех наборов, которые предприятие может выпустить за период t, есть выпуклая оболочка точек B_1, B_2, B_3. Разумеется, аналогичный пример может быть рассмотрен при любом ассортименте товаров T_1, T_2, ..., T_n и любом числе технологий 1, 2, ..., p. В этом случае получим выпуклую оболочку точек B_1, B_2, ..., B_p в n-мерном пространстве.

Пример 6.4. Имеются 3 сплава золота с серебром и другими металлами. Пусть $A_i = \left(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}\right)$, где $a_1^{(i)}$ – доля золота, а $a_2^{(i)}$ – доля серебра в i-м сплаве (i = 1, 2, 3). Из данных сплавов составлен новый сплав и s_1, s_2, s_3 – доли данных сплавов. Тогда доля золота в новом сплаве следующая: $a_1 = s_1a_1^{(1)} + s_2a_1^{(2)} + s_3a_1^{(3)}$, а доля серебра

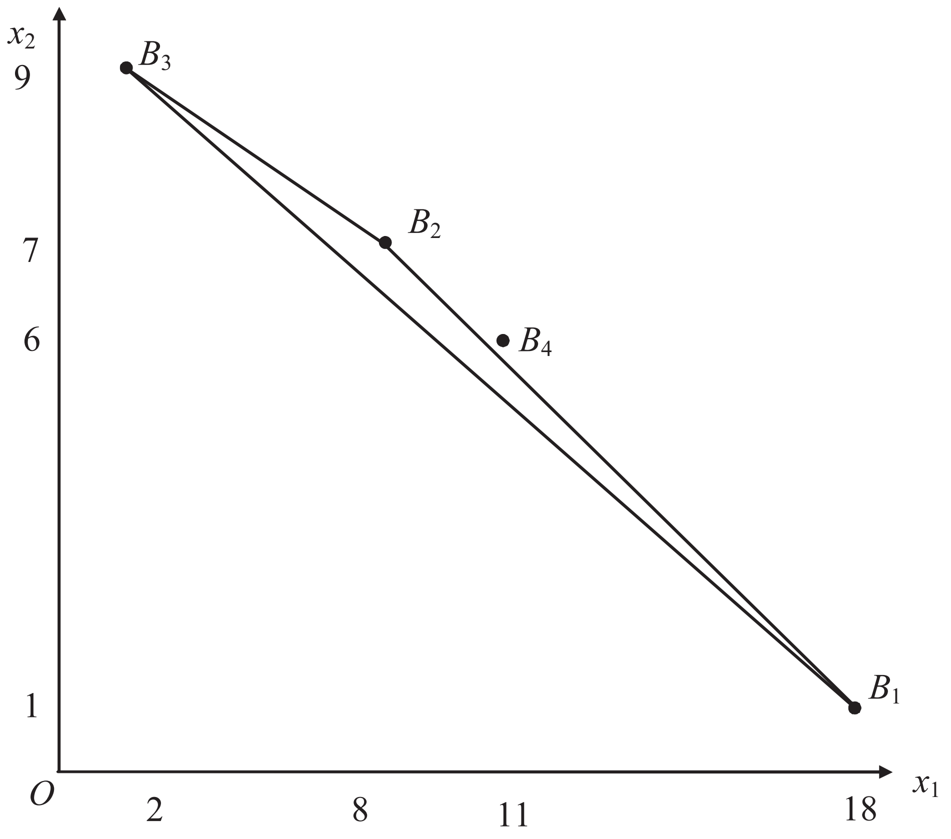

Рис. 6.18

– $a_2 = s_1 a_2^{(1)} + s_2 a_2^{(2)} + s_3 a_2^{(3)}$. Иначе говоря, точка $A(a_1,\ a_2)$ представляется в виде выпуклой линейной комбинации точек A_1, A_2, A_3.

В частности, ответим на такой вопрос: пусть даны сплавы

$$A_1(0{,}9;\ 0{,}05),\ A_2(0{,}4;\ 0{,}35),\ A_3(0{,}1;\ 0{,}45);$$

можно ли из данных сплавов составить новый сплав с содержанием золота 55% и серебра 30%? Ответ можно получить графически (рис. 6.18), если на клетчатой бумаге построить выпуклую оболочку точек $B_1(18,\ 1)$, $B_2(8,\ 7)$, $B_3(2,\ 9)$ – треугольник $B_1B_2B_3$ (масштаб увеличен в 20 раз).

Проделав достаточно точное построение, убедимся, что точка $B_4(11,\ 6)$ попадает вне данного треугольника, т.е. не принадлежит выпуклой оболочке точек B_1, B_2, B_3. Значит, искомый сплав не существует.

§ 6.11. Кривые второго порядка

1. Эллипс

Определение. ***Эллипсом*** γ *называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек* F_1 *и* F_2 *есть постоянная величина* $2a$, *превышающая расстояние между* F_1 *и* F_2.

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса, а расстояние $|F_1F_2|$ между ними – *фокальным расстоянием*.

При этом не исключается случай совпадения фокусов. Очевидно, что в этом случае эллипс представляет собой *окружность*.

Из данного определения эллипса вытекает простой способ его построения. Представим себе, что в точках F_1 и F_2 на плоскости воткнуты две булавки (рис. 6.19). Возьмем кусок веревки длиной $2a$ и его концы закрепим булавками. Поставив острие карандаша так, чтобы веревка натянулась, будем перемещать острие карандаша по плоскости. Тогда след, оставленный острием карандаша, и будет эллипсом.

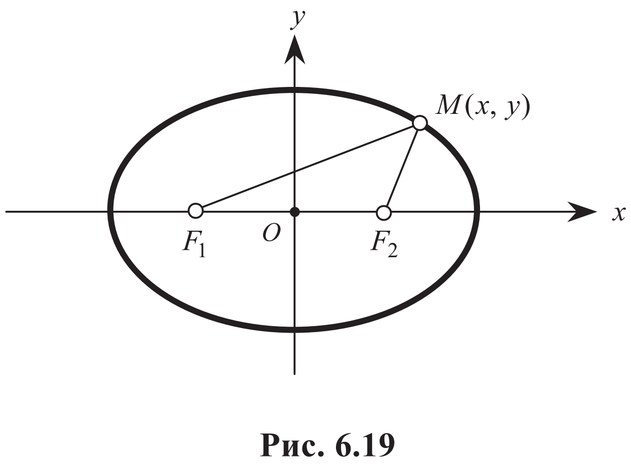

Рис. 6.19

Пусть точка M принадлежит эллипсу. Отрезки F_1M и F_2M будем называть *фокальными радиусами* точки M и обозначать соответственно r_1 и r_2.

Выведем *уравнение эллипса*, т.е. уравнение, которому удовлетворяли бы координаты точек эллипса и только они. Обозначим через $2a$ постоянную, о которой шла речь в определении эллипса.

Пусть $|F_1F_2| = 2c.$ По определению $a > c.$ Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат $Oxy,$ в которой фокусы F_1 и F_2 расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Тогда F_1 и F_2 имеют соответственно координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0).$ Пусть M – произвольная точка эллипса с координатами (x, y), тогда

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \;\; r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

По определению эллипса

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Следовательно,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \tag{6.48}$$

Используя стандартную процедуру «уничтожения радикалов», после несложных преобразований из (6.48) получим

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2. \tag{6.49}$$

Обозначим

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \;\; a > b. \tag{6.50}$$

С учетом введенного обозначения равенство (6.49) примет вид

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части этого равенства на a^2b^2, находим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6.51}$$

Таким образом, если точка принадлежит эллипсу, то ее координаты должны удовлетворять уравнению (6.51). Докажем теперь, что если координаты некоторой точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (6.51), то она принадлежит эллипсу. Имеем

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x-c)^2 + y^2.$$

Подставляя в эти соотношения выражения для y^2 из (6.51), получим

$$r_1^2 = (x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2,$$

$$r_2^2 = (x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2.$$

Следовательно,

$$r_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|, \quad r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|. \tag{6.52}$$

Из уравнения (6.51) вытекает, что

$$|x| \le a. \tag{6.53}$$

Кроме того, так как $0 \le c < a$, то

$$\left|\frac{c}{a}\right| < 1. \tag{6.54}$$

Таким образом, из (6.53) и (6.54) получим

$$\left|\frac{c}{a}x\right| < a.$$

Следовательно,

$$a - \frac{c}{a}x > 0, \quad a + \frac{c}{a}x > 0.$$

В силу этого соотношения (6.52) принимают вид

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x, \;\; r_2 = a - \frac{c}{a}x.$$

Отсюда

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Это означает, что точка M располагается на эллипсе. Таким образом, полученное нами уравнение (6.51) является *уравнением эллипса*.

Заметим, что в разных системах координат на плоскости эллипс может задаваться различными уравнениями. В выбранной нами системе координат уравнение эллипса принимает наиболее простой вид. Будем называть это уравнение *каноническим уравнением эллипса*.

Замечание. Как уже упоминалось, окружность является частным случаем эллипса, для которого фокусы F_1 и F_2 совпадают. Это равносильно тому, что $c = 0$, т.е. $a = b = r$. В этом случае уравнение (6.51) принимает вид

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1.$$

Или, что то же самое,

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{6.55}$$

Исследуем геометрическую форму эллипса. Из (6.51) следует, что если точка с координатами (x_0, y_0) принадлежит эллипсу, то ему принадлежат и точки с координатами $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, -y_0)$. Это означает, что эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, называемые *главными осями*, и центр симметрии, называемый *центром* эллипса. Если эллипс задан каноническим уравнением, то его главными осями являются оси координат, а центром – начало координат.

Точки $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$ пересечения эллипса с его главными осями будем называть *вершинами* эллипса, а отрезки A_1A_2 и B_1B_2 – соответственно *большой и малой осями эл-*

липса. Числа a и b принято называть соответственно *большой и малой полуосями эллипса* (это название обусловлено тем, что $a > b$).

Также из канонического уравнения эллипса вытекает, что

$$|x| \le a, \ \ |y| \le b.$$

Это показывает, что эллипс расположен внутри прямоугольника со сторонами, определяемыми прямыми

$$x = a, \ x = -a, \ y = b, \ y = -b.$$

Замечание. Рассмотрим преобразование плоскости, при котором каждая точка с координатами (x, y) перейдет в точку с координатами $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, причем

$$\widetilde{x} = \frac{a}{b}x, \ \widetilde{y} = y \quad \left(\frac{a}{b} > 1\right). \tag{6.56}$$

Оно представляет собой равномерное растяжение плоскости в разные стороны от центра вдоль оси Ox. Очевидно, при таком преобразовании окружность, заданная уравнением

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

перейдет в эллипс, заданный уравнением

$$\frac{\widetilde{x}^2}{a^2} + \frac{\widetilde{y}^2}{b^2} = 1.$$

Таким образом, эллипс можно рассматривать как «вытянутую» окружность. Меру этой «вытянутости» характеризует следующее понятие.

Определение. ***Эксцентриситетом*** *эллипса называется число ε, равное отношению его фокального расстояния к большой полуоси, т.е.*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{6.57}$$

Так как $0 \le c < a,$ то эксцентриситет изменяется в следующих пределах

$$0 \le \varepsilon < 1.$$

Выясним, как отношение $\dfrac{b}{a}$ выражается через эксцентриситет. Имеем

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \qquad (6.58)$$

Из (6.58) вытекает, что среди эллипсов, имеющих одну и ту же малую полуось, но разные эксцентриситеты, более «вытянутым» будет тот, у которого эксцентриситет больше.

Замечание. Случай $c = 0,$ как отмечалось выше, соответствует окружности. Из (6.57) следует, что эксцентриситет окружности равен нулю.

2. Гипербола

Определение. ***Гиперболой*** γ *называется множество всех точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до данных точек* F_1 *и* F_2 *есть величина постоянная.*

Точки F_1 *и* F_2 называются *фокусами* гиперболы, а расстояние между ними – *фокальным расстоянием.*

Пусть точка M принадлежит гиперболе. Так же, как и в случае эллипса, обозначим постоянную, о которой шла речь в определении гиперболы, через $2a$, а фокальное расстояние – через $2c$. Отрезки F_1M и F_2M будем называть *фокальными радиусами* точки M и обозначать соответственно r_1 и r_2.

Замечание. Из неравенства треугольника следует, что выполняются неравенства

$$|F_1M| < |F_2M| + |F_1F_2|,$$

$$|F_2M| < |F_1M| + |F_1F_2|.$$

Следовательно,

$$\left|\,|F_1M| - |F_2M|\,\right| < |F_1F_2|.$$

А значит,

$$a < c. \tag{6.59}$$

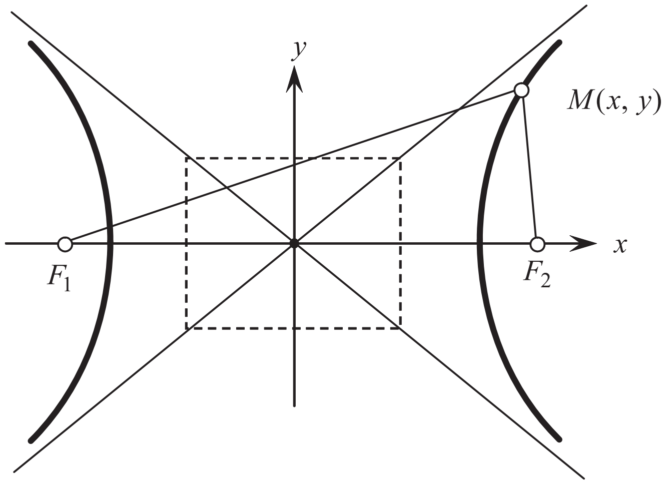

Рис. 6.20

Выведем *каноническое уравнение гиперболы*. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат Oxy, в которой фокусы F_1 и F_2 расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Тогда F_1 и F_2 имеют координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ соответственно. Пусть M – произвольная точка гиперболы с координатами (x, y), тогда

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ \ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{6.60}$$

По определению гиперболы

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{6.61}$$

Подставляя в (6.60) выражения для r_1 и r_2, имеем

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Проведя преобразования, аналогичные тем, что были выполнены при выведении уравнения эллипса, получим

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{6.62}$$

где введено обозначение

$$b=\sqrt{c^2-a^2}. \tag{6.63}$$

Тем самым доказано, что координаты любой точки гиперболы удовлетворяют уравнению (6.62).

Докажем теперь, что если координаты некоторой точки $M(x,y)$ удовлетворяют уравнению (6.62), то она принадлежит гиперболе. Из (6.62) аналогично тому, как это делалось при выводе уравнения эллипса, находим

$$r_1=\begin{cases}\dfrac{c}{a}x+a, & \text{если } x>0,\\[2ex] -\dfrac{c}{a}x-a, & \text{если } x<0;\end{cases}$$

$$r_2=\begin{cases}\dfrac{c}{a}x-a, & \text{если } x>0,\\[2ex] -\dfrac{c}{a}x+a, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Отсюда получим

$$|r_1-r_2|=\left|\frac{c}{a}x+a-\frac{c}{a}x+a\right|=2a, \quad \text{если } x>0,$$

$$|r_1-r_2|=\left|-\frac{c}{a}x-a+\frac{c}{a}x-a\right|=2a, \quad \text{если } x<0.$$

Таким образом,

$$|r_1-r_2|=2a.$$

Следовательно, точка M принадлежит гиперболе. Итак, уравнение (6.62) является *уравнением гиперболы*. Будем называть *его каноническим уравнением* гиперболы.

Исследуем каноническое уравнение гиперболы для получения представления о ее форме. Так же, как и эллипс, гипербола имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (*главные оси*) и центр симметрии (*центр гиперболы*). Если гипербола задана каноническим уравнением, то ее главными осями будут оси координат, а центром – начало координат.

Ось симметрии, проходящая через фокусы гиперболы, называется *действительной осью*, а перпендикулярная ей – *мнимой осью*. Точки пересечения гиперболы с действительной осью называются *вершинами* гиперболы. Числа a и b называются соответственно *действительной и мнимой полуосями* гиперболы.

Из уравнения (6.62) вытекает, что

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 0,$$

что равносильно тому, что

$$\left|\frac{x}{a}\right| > \left|\frac{y}{b}\right|.$$

Следовательно, внутри области, определяемой неравенством

$$\left|\frac{x}{a}\right| \leq \left|\frac{y}{b}\right|,$$

точек гиперболы нет. Границы этой области, задаваемые прямыми

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x, \tag{6.64}$$

называются *асимптотами* гиперболы.

Таким образом, гипербола лежит внутри тех вертикальных углов, образованных асимптотами, которым принадлежат фокусы.

Эксцентриситет гиперболы, так же как и для эллипса, задается формулой

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Из (6.63) следует, что

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1+\varepsilon^2}. \tag{6.65}$$

Из (6.64) вытекает, что отношение $\frac{b}{a}$ равно тангенсу половины угла между асимптотами гиперболы. Таким образом, эксцентриситет гиперболы является числовой характеристикой величины раствора угла между асимптотами.

3. Парабола

Определение. ***Параболой*** *называется множество всех точек плоскости, для которых расстояние до данной точки F равно расстоянию до данной прямой d, не проходящей через точку F.*

Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая d – *директрисой*. Расстояние от фокуса до директрисы называется *параметром* параболы и обозначается через p.

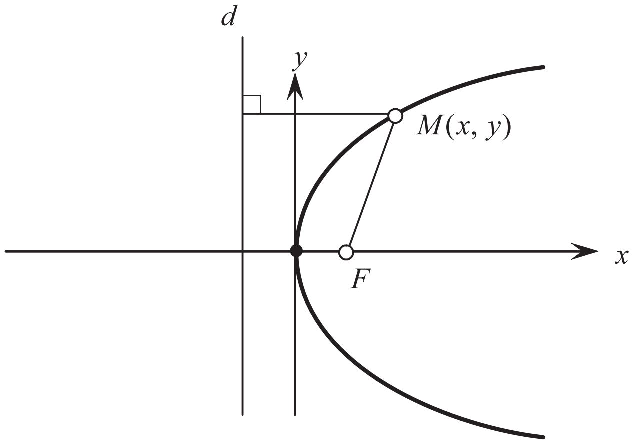

Рис. 6.21

Выведем уравнение параболы. Выберем начало O декартовой системы координат на середине отрезка FD, представляющего собой перпендикуляр, опущенный из точки F на прямую d. В этой системе координат фокус F имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а директриса d задается уравнением $x + \frac{p}{2} = 0$. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Обозначим через ρ расстояние от точки M до директрисы d. Тогда

$$|FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \tag{6.66}$$

$$\rho = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Согласно определению параболы имеет место равенство

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, после несложных вычислений получим

$$y^2 = 2px. \tag{6.67}$$

Итак, мы доказали, что точки параболы удовлетворяют уравнению (6.67). Докажем теперь, что точка M, координаты которой удовлетворяют уравнению (6.67), принадлежит параболе. Действительно, подставляя выражение для y^2 из (6.67) в (6.66), получим

$$FM = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Следовательно,

$$FM = \rho.$$

А это свидетельствует о том, что точка M принадлежит параболе.

Уравнение (6.67) называется *каноническим* уравнением параболы. Из канонического уравнения вытекают следующие свойства параболы. Так как переменная y фигурирует в уравнении во второй степени, то из того, что точка с координатами (x, y) удовлетворяет уравнению (6.67), следует, что ему будет удовлетворять и точка с координатами $(x, -y)$. Таким образом, парабола симметрична относительно оси OF, называемой *осью параболы*. Точка O пересечения этой оси с параболой называется *вершиной* параболы.

Кроме того, из уравнения (6.67) следует, что точки параболы принадлежат правой полуплоскости. По определению полагают эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

4. Общее уравнение кривой второго порядка

Определение. ***Линией порядка*** *k на плоскости называется множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют алгебраическому уравнению степени k.*

Как мы уже знаем, любую прямую на плоскости можно задать линейным уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

т.е. прямая есть линия первого порядка.

Рассмотрим *кривую второго порядка*, т.е. линию на плоскости, определяемую алгебраическим уравнением второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{01}y + a_{00} = 0, \tag{6.68}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{10}, a_{01}, a_{00}$ – некоторые действительные числа, причем $a_{11,} a_{12}, a_{22}$ не равны нулю одновременно. Уравнение (6.68) называется *общим уравнением* линии второго порядка.

Уравнение (6.68) может быть также записано в векторной форме

$$(A\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{b}, \vec{x}) + a_{00} = 0, \tag{6.69}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{6.70}$$

$$\vec{b} = (2a_{10}, 2a_{01}), \ \ \vec{x} = (x, y). \tag{6.71}$$

Заметим, что

$$A^T = A.$$

Поэтому матрица A может быть истолкована как матрица квадратичной формы

$$f(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2. \qquad (6.72)$$

Эллипс, гипербола и парабола являются примерами кривых второго порядка на плоскости. Кроме названных кривых, существуют и другие виды кривых второго порядка. Так, например, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \qquad (6.73)$$

где $a \neq 0, b \neq 0,$ равносильное совокупности

$$y - \frac{b}{a}x = 0, \quad y + \frac{b}{a}x = 0,$$

задает на плоскости *пару пересекающихся прямых*. Уравнение вида

$$y^2 - a^2 = 0, \qquad (6.74)$$

где $a \neq 0$, определяет на плоскости *пару параллельных прямых*

$$y - a = 0, \quad y + a = 0,$$

а уравнение

$$y^2 = 0 \qquad (6.75)$$

– *пару совпавших прямых* $y = 0.$

Существуют уравнения второго порядка, которые задают на плоскости одну точку либо вообще не задают никаких точек. Примером такого уравнения является следующее:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0, \tag{6.76}$$

где $a \neq 0, b \neq 0$. Это уравнение задает только одну точку – начало координат $(0,0)$. С другой стороны, его также можно интерпретировать как уравнение *пары мнимых пересекающихся прямых*:

$$\frac{x}{a}+i\frac{y}{b}=0, \quad \frac{x}{a}-i\frac{y}{b}=0.$$

Аналогичным образом уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \tag{6.77}$$

(где $a \neq 0, b \neq 0$) определяет «пустую» линию. Это уравнение называется *уравнением мнимого эллипса*. Ему удовлетворяют лишь точки с комплексными координатами.

Точно так же обстоит дело в случае уравнения

$$y^2+a^2=0, \tag{6.78}$$

где $a \neq 0$. Данное уравнение также не определяет ни одной точки. Оно задает *пару мнимых параллельных прямых*

$$y=ai, \quad y=-ai.$$

Одна и та же линия на плоскости в разных системах координат задается различными уравнениями, поэтому, выбирая должным образом систему координат, уравнение (6.68) можно упростить. Система координат, в которой уравнение кривой принимает наиболее простой вид, называется *канонической*.

Выше были рассмотрены некоторые типы кривых второго порядка. Можно доказать, что при помощи преобразования декартовой системы координат

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+x_0, \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+y_0, \end{cases} \tag{6.79}$$

представляющего собой композицию поворота осей на угол α и параллельного переноса начала в точку (x_0, y_0), либо преобразования

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + y_0 \end{cases} \tag{6.80}$$

(такая же композиция плюс отражение относительно оси абсцисс) уравнение кривой второго порядка приводится к одному из уравнений (6.51), (6.62), (6.67), (6.73) – (6.78). Таким образом, кривыми, задаваемыми этими уравнениями, исчерпывается весь класс кривых второго порядка.

Например, рассмотрим кривую, определяемую уравнением

$$y^2 + 2y + 1 - 4x = 0.$$

В новой декартовой системе координат, задаваемой соотношениями

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + 1, \end{cases}$$

данное уравнение преобразуется к виду

$$y'^2 = 4x'.$$

Следовательно, исходное уравнение является уравнением некоторой параболы.

§ 6.12. Поверхности второго порядка

Определение. ***Поверхностью второго порядка*** *называется множество точек в пространстве, координаты x, y и z которых удовлетворяют уравнению*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$

$$+2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0, \tag{6.81}$$

где $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{00}$ – действительные числа, причем $a_{11},\ a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ одновременно не равны нулю.

Основным методом исследования формы поверхности второго порядка является *метод сечений*. Суть этого метода состоит в том, что вывод о форме поверхности основывается на исследовании формы сечений этой поверхности некоторыми плоскостями (обычно используются плоскости $x = a$, $y = b$, $z = c$, параллельные координатным плоскостям).

Ниже мы перечислим основные типы поверхностей второго порядка, указав их *канонические* уравнения.

1. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{6.82}$$

Из уравнения (6.82) следует, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат – центром симметрии эллипсоида. Кроме того, эллипсоид содержится в прямоугольном параллелепипеде, задаваемом неравенствами

$$|x|\le a,\ \ |y|\le b,\ \ |z|\le c.$$

Числа a, b, c называются *полуосями эллипсоида*. Точки пересечения эллипсоида с осями координат $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$, $B_1(0, b, 0)$, $B_2(0, -b, 0)$, $C_1(0, 0, c)$, $C_2(0, 0, -c)$ называются *вершинами*.

Продемонстрируем на примере эллипсоида суть метода сечений. Для остальных типов поверхностей рекомендуем читателю провести исследование геометрической формы самостоятельно.

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью $z = h.$ Имеем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}\ .$$

Таким образом, если $|h| > c,$ то плоскости $z = h$ не имеют пересечений с эллипсоидом, при $h = \pm c$ они касаются эллипсоида в его вершинах, а если $|h| < c,$ пересекают по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

Например, при $h = 0$, т.е. сечение плоскостью $z = 0$, получим уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Аналогичная ситуация складывается при рассмотрении сечений эллипсоида плоскостями $x = h, \ \ y = h.$

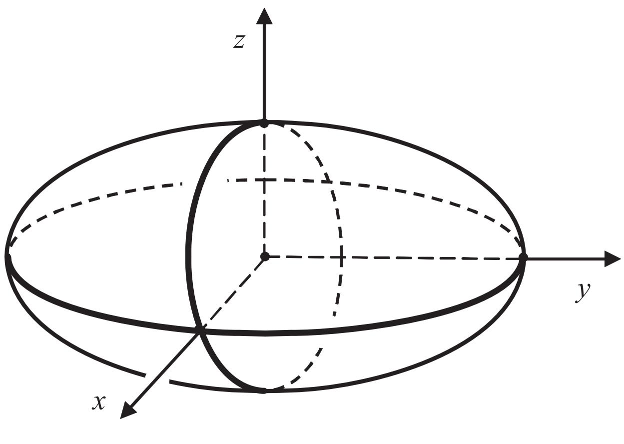

Рис. 6.22

Замечание. Частным случаем эллипсоида (при $a = b = c = r$) является сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

с центром в начале координат и радиусом r.

2. Другие типы поверхностей второго порядка

1. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (6.83)$$

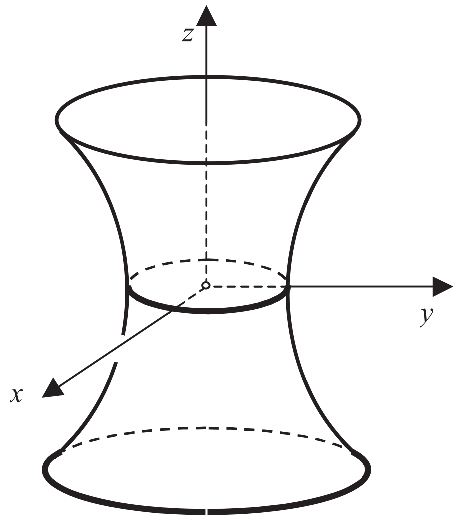

Рис. 6.23

2. Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \quad (6.84)$$

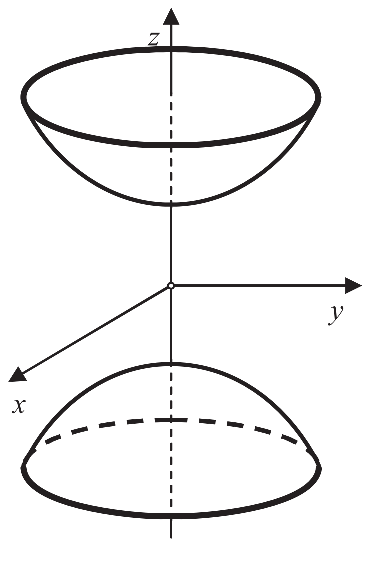

Рис. 6.24

3. Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{6.85}$$

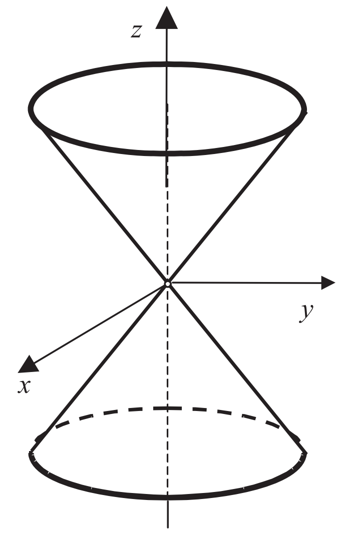

Рис. 6.25

4. Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{6.86}$$

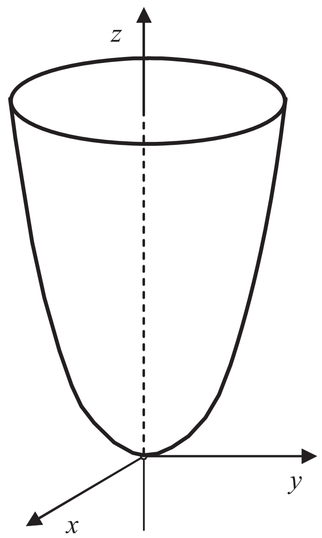

Рис. 6.26

5. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{6.87}$$

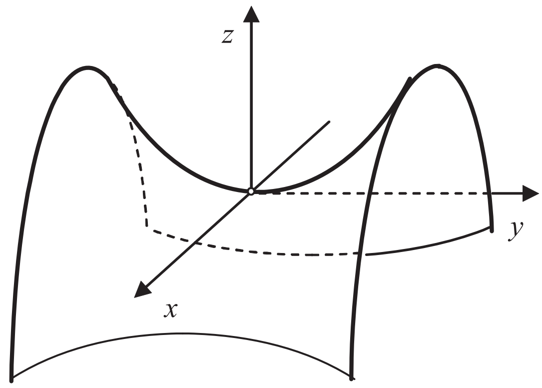

Рис. 6.27

6. Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6.88}$$

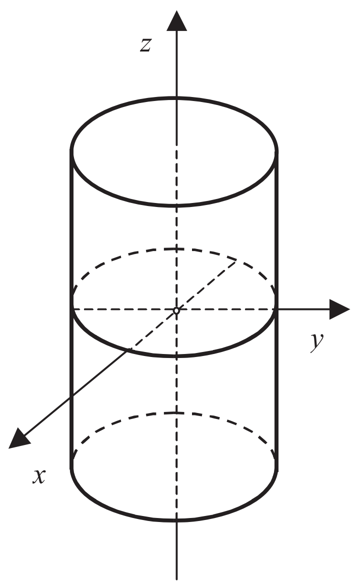

Рис. 6.28

7. Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1. \tag{6.89}$$

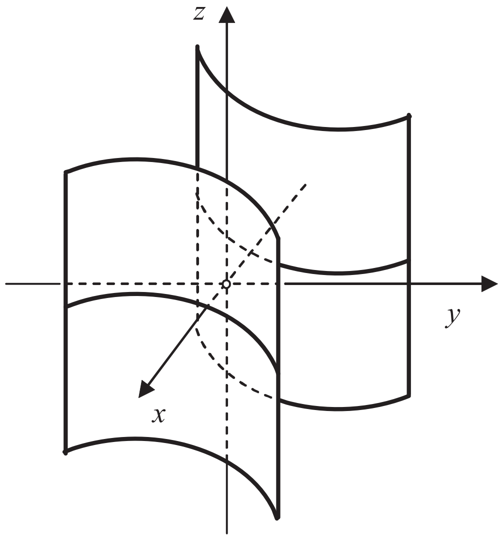

Рис. 6.29

8. Параболический цилиндр

$$x^2 = 2py, \quad y^2 = 2qx. \tag{6.90}$$

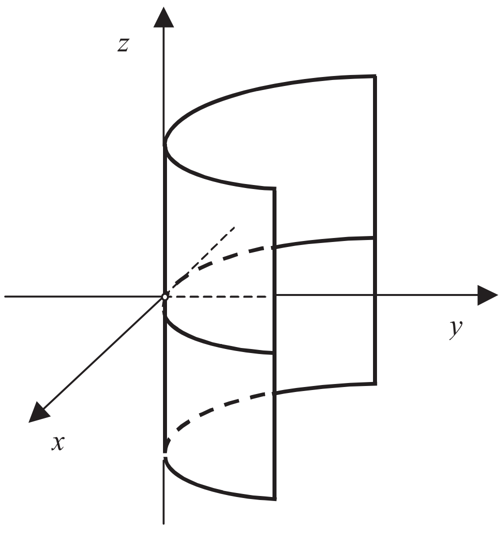

Рис. 6.30

9. Пара пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{6.91}$$

10. Пара параллельных плоскостей

$$x^2 - a^2 = 0. \tag{6.92}$$

11. Пара совпавших плоскостей

$$x^2 = 0. \tag{6.93}$$

На этом заканчивается классификация поверхностей второго порядка.

ГЛАВА 7

ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 7.1. Общая задача оптимизации. Линейное программирование. Основные задачи

На практике постоянно встречаются такие ситуации, когда достичь какого-то результата можно не одним, а многими различными способами. В подобной ситуации может оказаться отдельно взятый человек, целое предприятие или даже отрасль, и, наконец, народное хозяйство в целом. Естественно, что когда решений много, ищется в каком-то смысле *наилучшее*. Математически это сводится обычно к нахождению наибольшего или наименьшего значения некоторой функции, т.е. к задаче: найти max (min) $f(x)$ при условии, что переменная x (обычно говорят точка x) пробегает некоторое заранее данное множество X. Пишут так:

$$f(x) \to \max(\min),\ \ x \in X. \tag{7.1}$$

Определенная таким образом задача называется *задачей оптимизации*. Множество X называется *допустимым множеством* данной задачи, а функция $f(x)$ – *целевой функцией*.

В подавляющем большинстве случаев точка x задается набором из нескольких чисел:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

т.е. является точкой n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$; соответственно множество X есть подмножество в $\mathbb{R}^n$.

Очень многое зависит от того, в каком виде задается допустимое множество X. Во многих случаях X выделяется из $\mathbb{R}^n$ с помощью системы неравенств (нестрогих):

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \end{cases} \tag{7.2}$$

где $g_1, g_2, ..., g_m$ – какие-то заданные функции в $\mathbb{R}^n$.

Иначе говоря, X есть множество точек $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих системе неравенств (7.2).

В этом случае задача оптимизации приобретает следующий вид. Дана функция n переменных $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и система неравенств (7.2). Требуется найти max (min) f при условиях (7.2):

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min).$$

Понятно, что следует найти не только само значение max (min) f, но и точку или точки, если их несколько, в которых это значение достигается. Такие точки называются *оптимальными решениями*. Множество всех оптимальных решений будем называть *оптимальным множеством* и обозначать X^*.

Задачи подобного рода получили название *задач математического программирования* (не следует путать математическое программирование с программированием на компьютере). При этом функцию f называют *целевой* функцией, а неравенства $g_i \geq 0 \; (i = 1, 2, ..., m)$ – *ограничениями*. В большинстве случаев в число ограничений входят условия неотрицательности всех переменных:

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, ..., \; x_n \geq 0$$

или их части, но это, впрочем, не обязательно.

В зависимости от характера функций $f, g_1, ..., g_m$ различают разные виды математического программирования. Наиболее простой и часто встречающийся случай, когда эти функции являются линейными, т.е. каждая из них имеет вид

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b.$$

Тогда говорят о *задаче линейного программирования*. Линейное программирование оформилось как отдельный раздел прикладной математики в 1940 – 1950-х гг., когда выяснилось, что целый ряд задач из сферы планирования и управления может быть сформулирован в виде задач линейного программирования. Для решения таких задач разработаны эффективные методы, с одним из которых (так называемым симплекс-методом) мы познакомимся дальше. Подсчитано, что в настоящее время примерно 80 – 85 % всех решаемых на практике задач оптимизации относится к задачам линейного программирования.

В дальнейшем, вместо того чтобы одновременно рассматривать оба типа задач: $f(x) \to \max$ и $f(x) \to \min$, будем рассматривать задачи только какого-нибудь одного типа. Такой подход оправдан тем, что всякая задача на максимум сводится к задаче на минимум (и наоборот) умножением целевой функции на -1.

Еще раз напомним, что в задаче оптимизации (7.1) множество X называется допустимым; соответственно любая точка $x \in X$ называется *допустимым решением*. Допустимое решение, дающее max (min) f, называется *оптимальным решением*. Неравенства (7.2) называются *ограничениями*.

Рассмотрим несколько примеров задач линейного программирования.

1. *Задача о банке* (пример заимствован из книги Дж. Синки "Управление финансами в коммерческом банке").

Пусть собственные средства банка в сумме с депозитами составляют 100 млн долл. Часть этих средств, но не менее 35 млн долл., должна быть размещена в кредитах. Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить кредиты в деньги без существенных потерь невозможно.

Другое дело ценные бумаги (особенно государственные). Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль, или, во всяком случае, без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. В нашем примере ликвидное ограничение таково: ценные бумаги должны составлять не менее 30 % средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.

Пусть x – средства (млн долл.), размещенные в кредитах, y – средства, вложенные в ценные бумаги. Имеем следующую систему линейных ограничений:

1) $x + y \le 100$ – балансовое ограничение;
2) $x \ge 35$ – кредитное ограничение;
3) $y \ge 0{,}3(x + y)$ – ликвидное ограничение;
4) $x \ge 0, y \ge 0.$

Цель банка состоит в том, чтобы получить максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг:

$$f = c_1 x + c_2 y \to \max \text{ при условиях 1) … 4),}$$

где c_1 – доходность кредитов, c_2 – доходность ценных бумаг.

Так как кредиты менее ликвидны, чем ценные бумаги, то обычно $c_1 > c_2$. Мы пришли к задаче линейного программирования с ограничениями 1) … 4) и целевой функцией f, которую требуется максимизировать.

2. *Задача о диете*. Из имеющихся в нашем распоряжении продуктов требуется составить такую диету, которая, с одной стороны, удовлетворяла бы минимальные потребности организма в питательных веществах (белках, жирах, углеводах, минеральных солях, витаминах), с другой – требовала бы наименьших затрат.

Рассмотрим простую математическую модель этой задачи.

Пусть имеются два вида продуктов: $П_1$ и $П_2$, содержащих питательные вещества A, B, C. В 1 кг продуктов $П_1$ и $П_2$ содержится определенное количество питательных веществ того или иного вида. Эти сведения представлены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

	A	B	C
в 1 кг $П_1$	a_1	b_1	c_1
в 1 кг $П_2$	a_2	b_2	c_2

Кроме этих данных, нам известны: a, b, c – ежесуточные потребности организма в питательных веществах A, B, C (соответственно) и s_1, s_2 – стоимости 1 кг продуктов $П_1$, $П_2$. Требуется рассчитать количество x_1 продукта $П_1$ и количество x_2 продукта $П_2$ так, чтобы обеспечить необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на продукты. Очевидно, общая стоимость продуктов будет $f = s_1x_1 + s_2x_2$.

Общее количество вещества A в обоих видах продуктов равно $a_1x_1 + a_2x_2$. Оно должно быть не меньше a: $a_1x_1 + a_2x_2 \geq a$.

Аналогичные неравенства должны выполняться для B и C. Таким образом, получим следующую задачу линейного программирования.

Дана система

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \geq a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 \geq b, \\ c_1x_1 + c_2x_2 \geq c \end{cases} \tag{7.3}$$

трех линейных неравенств с двумя неизвестными x_1, x_2 и линейная функция $f = s_1x_1 + s_2x_2$.

Среди решений системы (7.3), удовлетворяющих дополнительно условиям неотрицательности:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \tag{7.4}$$

требуется выбрать такое, при котором функция f достигает наименьшего значения (минимизируется):

$$f \to \min \text{ при условиях (7.3), (7.4).}$$

Заметим, что к подобной схеме могут быть сведены различные задачи о составлении сплавов, смесей горючего, кормовых смесей, смесей минеральных удобрений и т.п.

3. *Задача об использовании ресурсов*. Предприятие имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов разного рода: рабочую силу, деньги, сырье, оборудование, производственные ресурсы, площади и т.п. Допустим, например, ресурсы трех видов R_1, R_2, R_3 имеются в ко-

личествах соответственно b_1, b_2, b_3 условных единиц. Предприятие выпускает два вида товаров: T_1, T_2. Причем известно, сколько единиц каждого ресурса требуется для производства одной единицы каждого товара. Пусть a_{ij} – число единиц ресурса R_i (i = 1, 2, 3), необходимое для производства единицы товара T_j (j = 1, 2). Доход, получаемый предприятием от единицы каждого вида товаров, соответственно равен c_1, c_2. Требуется при данных ресурсах выпустить такую комбинацию товаров, при которой доход предприятия оказался бы максимальным.

Обозначим через x_1, x_2 соответственно количества товаров T_1, T_2. Очевидно, доход предприятия $f = c_1x_1 + c_2x_2$.

Общее количество ресурса R_1, используемого при выпуске обоих товаров, равно $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$. Оно не должно превосходить запаса b_1, т.е. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$.

Вообще количество ресурса R_i $(i = 1, 2, 3)$, используемого при выпуске обоих товаров, равное $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$, не должно превосходить b_i, т.е. должны выполняться неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \ \ (i = 1, 2, 3).$$

Математическая задача об использовании ресурсов состоит в отыскании значений неизвестных x_1, x_2, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3 \end{cases}$$

и максимизирующих функцию $f = c_1x_1 + c_2x_2$.

4. *Транспортная задача*. Уголь, добываемый в нескольких месторождениях, отправляется ряду потребителей: заводам, электростанциям и т.п. Известно, сколько угля добывается в каждом из месторождений, скажем, за месяц и сколько его требуется на тот же срок любому из потребителей; известны также расстояния между месторождениями и потребителями, а также условия сообщения между ними. Учитывая эти данные, можно подсчитать, во что обходится перевозка каждой тонны угля из любого месторождения в

любой пункт потребления. Требуется при этих условиях спланировать перевозки угля таким образом, чтобы затраты были минимальными.

Пусть, например, имеются два месторождения M_1, M_2 и три потребителя $П_1$, $П_2$, $П_3$. Количество угля в M_1 и в M_2 соответственно a_1 и a_2. Запросы потребителей $П_1$, $П_2$, $П_3$ пусть будут соответственно b_1, b_2, b_3. Считаем, что суммарные запасы равны суммарным потребностям: $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$ (такое предположение вполне естественно). Наконец, заданы числа c_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2, 3) – стоимости перевозки тонны угля из M_i в $П_j$. Необходимо определить шесть чисел x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, где x_{ij} – количество угля, предназначенное к отправке из M_i к $П_j$.

Составим таблицу (табл. 7.2).

Таблица 7.2

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	Всего отправлено
M_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
M_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
Всего доставлено	b_1	b_2	b_3	–

Общее количество угля, вывезенное из M_1, должно равняться a_1; отсюда имеем условие

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1.$$

Аналогичное условие должно выполняться для M_2:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2.$$

Общее количество угля, доставленное в $П_1$, должно равняться b_1. Отсюда

$$x_{11} + x_{21} = b_1.$$

Аналогично получаем условия

$$x_{12} + x_{22} = b_2, \quad x_{13} + x_{23} = b_3.$$

Предположим, что затраты на перевозку прямо пропорциональны количеству перевозимого угля, т.е. перевозка из M_i в $П_j$ стоит $c_{ij}x_{ij}$. Тогда общие затраты по всем перевозкам будут

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}.$$

Таким образом, приходим к следующей задаче. Дана система

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2, \\ x_{11} + x_{21} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} = b_2, \\ x_{13} + x_{23} = b_3 \end{cases} \qquad (7.5)$$

пяти линейных уравнений с шестью неизвестными и линейная функция z. Требуется среди неотрицательных решений x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} системы (7.5) выбрать такое, при котором функция z достигает наименьшего значения (минимизируется).

Поставленная задача может быть, конечно, сформулирована и в более общем виде, т.е. с любым числом месторождений и потребителей. Она получила название *транспортной задачи* и явилась одной из первых проблем, для решения которых были с успехом применены методы линейного программирования.

Из рассмотренных четырех примеров, казалось бы, только первые три подходят под общую схему задач математического программирования. Так, в четвертом примере не все ограничения неравенства; часть из них (а именно (7.5)) являются уравнениями. Однако случай уравнений легко свести к случаю неравенств: достаточно каждое уравнение $g(x) = 0$ заменить системой из двух неравенств $g(x) \geq 0$ и $g(x) \leq 0$. Впрочем, сведение уравнений к неравенствам может быть осуществлено и более эффективным способом (см. ниже).

Дадим теперь общую формулировку задачи линейного программирования.

Пусть S – система линейных ограничений (*т.е. линейных уравнений или нестрогих линейных неравенств*) *с n переменными $x_1, x_2, ..., x_n$, а $f(x)$ – целевая функция вида*

$$f(x) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n.$$

Требуется решить задачу

$$f(x) \to \min \text{ при условиях } S.$$

Обычно система S включает в себя условия неотрицательности всех переменных:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \tag{7.6}$$

– это вытекает из реального смысла чисел $x_1, x_2, ..., x_n$. Будем называть эти условия *тривиальными* ограничениями.

Наиболее часто встречаются две разновидности задачи линейного программирования.

1. *Каноническая задача линейного программирования*. В этом случае система S, помимо тривиальных ограничений (7.6), включает в себя *только уравнения*. Примером может служить транспортная задача линейного программирования.

2. *Стандартная задача линейного программирования*. Это означает, что система S состоит *только из неравенств*, в число которых входят тривиальные ограничения (7.6). Примерами могут служить рассмотренные выше задачи о банке, о диете, об использовании ресурсов.

Указанные две разновидности сводятся одна к другой. Покажем сначала, как свести *стандартную* задачу к *канонической*.

Пусть дана стандартная задача линейного программирования – будем называть ее задачей A:

$$f = c_0 + c_1x_1 + c_1x_2 + ... + c_nx_n \to \min \text{ при условиях } S,$$

где S – заданная система линейных неравенств, включающая (7.6).

Пусть m – число нетривиальных неравенств в системе S. Рассмотрим любое из этих неравенств:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b \geq 0. \tag{7.7}$$

Введем новую дополнительную переменную x_{n+1} и заменим неравенство (7.7) *двумя* ограничениями: уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = x_{n+1}$$

и условием $x_{n+1} \geq 0$.

Если подобную замену произвести с каждым из нетривиальных неравенств системы S, то получим новую систему S_1, состоящую из уравнений, а также условий неотрицательности всех переменных: исходных $x_1, x_2, ..., x_n$ и дополнительных $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$. Заметим, что дополнительные переменные $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ называют обычно *балансовыми*.

Назовем задачей B задачу $f \to \min$ при условиях S_1.

Сравнивая задачи A и B, нетрудно убедиться в их эквивалентности: любое оптимальное решение задачи A дает оптимальное решение задачи B, если к значениям переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ добавить значения балансовых переменных. Обратно, любое оптимальное решение задачи B, если отбросить значения балансовых переменных, дает оптимальное решение задачи A.

В качестве примера сведения стандартной задачи к канонической можно привести *задачу о диете*.

Введя для первого неравенства системы (7.2) балансовую переменную x_3, для второго – x_4, для третьего неравенства – x_5, получим каноническую задачу:

$$f = s_1x_1 + s_2x_2 \to \min \text{ при условиях}$$

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 - a = x_3, \\ b_1x_1 + b_2x_2 - b = x_4, \\ c_1x_1 + c_2x_2 - c = x_5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Покажем теперь, как свести *каноническую* задачу к *стандартной*. Чтобы не заслонять суть дела громоздкими записями, рассмотрим пример.

Пусть дана каноническая задача линейного программирования:

$$f = -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min \text{ при условиях}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{cases} \tag{7.8}$$

Будем считать ее *задачей B*.

Применив к системе из двух уравнений (7.8) метод Гаусса, выделим базис неизвестных:

$$\begin{cases} x_3 = x_1 - 2x_2 + 1, \\ x_4 = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Учитывая эти равенства, можно написать новое выражение для f:

$$f = -x_1 + x_2 + (x_1 - 2x_2 + 1) - 2(x_1 - x_2) = -2x_1 + x_2 + 1.$$

Рассмотрим теперь новую задачу линейного программирования, которую будем считать *задачей A*:

$$f = -2x_1 + x_2 + 1 \to \min \text{ при условиях}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1 \geq 0, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{7.9}$$

Если эту стандартную задачу мы захотели бы свести к канонической, то пришлось бы ввести балансовые переменные x_3 и x_4 и заменить систему (7.9) новой системой

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1 = x_3, \\ x_1 - x_2 = x_4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0, \end{cases} \tag{7.10}$$

но тогда новая задача

$$f = -2x_1 + x_2 + 1 \to \min \text{ при условиях (7.10)}$$

ничем, в сущности, не будет отличаться от исходной задачи B. Таким образом, задача B свелась к стандартной задаче A с меньшим числом переменных.

§ 7.2. Геометрия задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования по отысканию максимума (или минимума) линейной функции $f(x) = c_0 + (c, x)$ на допустимом множестве X, заданном с помощью системы S линейных ограничений (уравнений или нестрогих неравенств). Напомним, что множество X, заданное с помощью системы линейных ограничений в пространстве $\mathbb{R}^n$, называется *выпуклой многогранной областью* в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, геометрический смысл задачи линейного программирования состоит в *отыскании максимума* (*минимума*) *линейной функции* $f(x)$ *на заданной выпуклой многогранной области* $X \subset \mathbb{R}^n$.

Скажем, что целевая функция в задаче линейного программирования *ограничена*, если в задаче на максимум целевая функция ограничена на допустимом множестве сверху, а в задаче на минимум – снизу.

Теорема 7.1. *Если в задаче линейного программирования допустимое множество непусто и целевая функция ограничена*, *то существует хотя бы одно оптимальное решение*.

Доказательство теоремы 7.1 будет дано ниже.

При исследовании задачи линейного программирования важнейшую роль играет понятие угловой точки. Напомним, что точка $x_0 \in X$ называется угловой точкой множества X, если она не является внутренней точкой ни для какого отрезка AB, целиком содержащегося в X.

Теорема 7.2. *Если в задаче линейного программирования* $f(x) \to \max(\min)$ *при условии* $x \in X$ *допустимое множество* X *имеет хотя бы одну угловую точку*, *а целевая функция* $f(x)$ *ограничена*, *то найдется угловая точка множества* X, *в которой* $f(x)$ *принимает оптимальное значение данной задачи*.

Доказательство теоремы 7.2 также будет дано ниже. Из теоремы 7.2 следует, что задачу линейного программирования с ограниченной целевой функцией и не слишком большим числом угловых точек можно решить, применяя следующий метод (метод перебора вершин).

Находятся все угловые точки допустимого множества, и среди этих точек выбирается точка с оптимальным (максимальным или минимальным) значением целевой функции. Найденная точка и есть оптимальное решение (возможно, правда, не единственное).

Указанный способ решения задачи линейного программирования, как правило, требует громоздких вычислений. В § 8.1 и 8.2 мы ознакомимся с так называемым симплекс-методом, представляющим собой целенаправленную процедуру перебора вершин.

Доказательства теорем 7.1 и 7.2 используют метод исключения неизвестных, аналогичный методу Гаусса решения систем линейных уравнений. Геометрическое понятие, соответствующее процедуре исключения неизвестных для систем линейных неравенств, называется *проектированием* выпуклого многогранного множества на координатные плоскости.

Пусть точка $x \in \mathbb{R}^n$ имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Заменив последнюю координату x_n нулем, получим точку $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Будем называть эту точку *проекцией* точки x на координатную плоскость $x_n = 0$. Аналогично определяется проекция точки x на любую координатную плоскость. Например, проекция на координатную плоскость $x_n = 0$, $x_{n-1} = 0$ есть точка $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, 0, 0)$. Вообще, сохранив любые k координат точки x и заменив остальные координаты нулями, получим проекцию точки x на соответствующую координатную плоскость.

Сделаем сразу же замечание. Как только что сказано, проектирование точки x на ту или иную координатную плоскость сводится к сохранению каких-то k координат точки x и замене остальных $n - k$ координат нулями. Если просто отбросить эти $n - k$ нулевых координат, получим точку пространства $\mathbb{R}^k$. Эту точку также можно называть проекцией точки x на соответствующую координатную плоскость. Именно так мы и будем понимать дальше проекцию точки x. Например, проекция точки $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ на координатную плоскость $x_1 = 0$ понимается как точка $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

Теорема о проекциях. *Если M – выпуклая многогранная область в $\mathbb{R}^n$, то проекция M на любую координатную плоскость снова является выпуклой многогранной областью (в соответствующем пространстве $\mathbb{R}^k$).*

Доказательство. Поскольку взятие проекции для точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сводится к отбрасыванию нескольких координат, то достаточно доказать теорему для случая, когда отбрасывается только *одна* координата, например x_n. Другими словами, мы должны доказать, что если от каждой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ отбросить последнюю координату x_n, то полученные точки $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ будут образовывать выпуклую многогранную область в $\mathbb{R}^{n-1}$.

По условию, область M выделяется из $\mathbb{R}^n$ с помощью некоторой системы S нестрогих линейных неравенств. Рассмотрим любое из этих неравенств

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a \geq 0. \tag{7.11}$$

Если $a_n = 0$, то оставим неравенство (7.11) без изменения. Если же $a_n \neq 0$, то, в зависимости от знака a_n, приведем его к виду $P \geq x_n$ (при $a_n < 0$) либо $Q \leq x_n$ (при $a_n > 0$). Итак, любое из неравенств системы S приводится к одному из трех видов

$$R \geq 0, P \geq x_n, Q \leq x_n,$$

где R, P и Q суть выражения вида

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_{n-1}x_{n-1} + b,$$

т.е. многочлены первой степени, не содержащие x_n.

Таким образом, система S равносильна системе из трех блоков:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1 \geq x_n, \\ P_2 \geq x_n, \\ \quad\ldots \\ P_p \geq x_n, \end{array}} \tag{7.12}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_n \geq Q_1, \\ x_n \geq Q_2, \\ \quad\ldots \\ x_n \geq Q_q, \end{array}} \tag{7.13}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} R_1 \ge 0, \\ R_2 \ge 0, \\ \ldots \\ R_r \ge 0. \end{array}} \tag{7.14}$$

Разумеется, при этом не исключено, что в системе (7.12), (7.13), (7.14) не будет одного или даже двух блоков. Это зависит от знаков чисел a_n.

Построим теперь систему неравенств с $n - 1$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ следующим образом: для любого неравенства $P_\alpha \ge x_n$ блока (7.12) и любого неравенства $x_n \ge Q_\beta$ блока (7.13) напишем новое неравенство

$$P_\alpha \ge Q_\beta,$$

неравенства же блока (7.14) оставим без изменения. В итоге получится новая система

$$\begin{cases} P_\alpha \ge Q_\beta & (\alpha = 1, \ldots, p;\ \beta = 1, \ldots, q) \\ R_\gamma \ge 0 & (\gamma = 1, \ldots, r) \end{cases} \tag{7.15}$$

неравенств с $n - 1$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Эта система выделяет из пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ выпуклую многогранную область $\widetilde{M}$. Покажем, что $\widetilde{M}$ есть проекция области M на координатную плоскость $x_n = 0$, чем и завершим доказательство теоремы.

Поясним подробнее определение системы (7.15). Может случиться, что в системе из трех блоков (7.12), (7.13), (7.14) первый или второй блок отсутствует. Тогда в системе (7.15) будут только неравенства $R_\gamma \ge 0$. Если отсутствует блок (7.14), то в (7.15) будут только неравенства $P_\alpha \ge Q_\beta$. Наконец, если отсутствуют блоки (7.12), (7.14) или (7.13), (7.14), то системы (7.15) нет вовсе. Мы будем считать ее в этом случае тождественной, т.е. состоящей из неравенства $0 \ge 0$ (или точнее, из неравенства $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_{n-1} \ge 0$).

Фактически мы должны доказать два утверждения.

А. Если от любого решения системы S отбросить последнюю координату, то получим некоторое решение системы (7.15).

B. Для любого решения системы (7.15) можно найти такое значение неизвестного x_n, присоединив которое, получим решение исходной системы S.

Доказательство. Утверждение A очевидно (если какой-нибудь набор значений неизвестных удовлетворяет системе S, то он удовлетворяет и системе (7.12), (7.13), (7.14); но тогда для этого же набора выполняются все неравенства системы (7.15)).

Докажем утверждение B. Сначала рассмотрим основной случай, когда в системе (7.15) имеется хотя бы одно неравенство $P_\alpha \geq Q_\beta$. Пусть

$$x_1 = \overset{\circ}{x}_1, \ldots, x_{n-1} = \overset{\circ}{x}_{n-1}$$

– какое-нибудь решение системы (7.15). Подставив указанные значения неизвестных в выражения $P_1, \ldots, P_p, Q_1, \ldots, Q_q, R_1, \ldots, R_r$, получим некоторые числа $P_1^\circ, \ldots, P_p^\circ, Q_1^\circ, \ldots, Q_q^\circ, R_1^\circ, \ldots, R_r^\circ$. Для них выполняются неравенства

$$P_\alpha^\circ \geq Q_\beta^\circ,\ R_\gamma^\circ \geq 0\ \left(\alpha = 1, \ldots, p;\ \beta = 1, \ldots, q;\ \gamma = 1, \ldots, r\right).$$

Мы видим, что каждое из чисел $Q_1^\circ, \ldots, Q_q^\circ$ не больше, чем любое из чисел $P_1^\circ, \ldots, P_p^\circ$. Но в таком случае обязательно найдется такое число $\overset{\circ}{x}_n$, которое заключено между всеми числами $Q_1^\circ, \ldots, Q_q^\circ$ и всеми числами $P_1^\circ, \ldots, P_p^\circ$:

$$P_\alpha^\circ \geq \overset{\circ}{x}_n \geq Q_\beta^\circ\ \ \left(\alpha = 1, \ldots, p;\ \beta = 1, \ldots, q\right).$$

Отсюда следует, что набор значений неизвестных

$$x_1 = \overset{\circ}{x}_1, \ldots, x_{n-1} = \overset{\circ}{x}_{n-1}, x_n = \overset{\circ}{x}_n$$

является решением системы (7.12), (7.13), (7.14), а следовательно, и (7.15).

В исключительном случае, когда в системе (7.12), (7.13), (7.14) отсутствует первый или второй блок, рассуждаем следующим образом. Если нет первого блока, в качестве x_n° можно взять любое число, удовлетворяющее условиям

$$x_n^\circ \geq Q_\beta^\circ, (\beta = 1, \ldots, q).$$

Аналогично при отсутствии второго блока выбираем x_n°, исходя из условий

$$P_\alpha^\circ \geq x_n^\circ, (\alpha = 1, \ldots, p).$$

Наконец, если отсутствуют сразу первый и второй блоки, то в качестве x_n° можно взять какое угодно число. Теорема доказана.

Используем теорему о проекциях для доказательства одного факта о вершинах выпуклых многогранных областей.

Предварительно заметим следующее: если в системе линейных неравенств, задающих область $M \subset \mathbb{R}^n$, одно из неизвестных, например x_n, отсутствует, то область M не имеет вершин. Действительно, если какая-либо точка $A = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ принадлежит M, то и все точки прямой

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1}^0, x_n = t \quad \left(t \in \mathbb{R}\right),$$

проходящей через A, также принадлежат M. Отсюда следует, что A не может быть вершиной M.

Уточним нашу терминологию. Мы будем говорить, что неизвестное x_n *реально входит* в систему S, если хотя бы одно из неравенств системы содержит член вида ax_n, где $a \neq 0$, в противном случае будем говорить, что x_n в систему S *реально не входит*. Это означает: если в систему S некоторое неизвестное реально не входит, то область $M \subset \mathbb{R}^n$, отвечающая системе S, не имеет вершин.

Теперь сформулируем предложение о вершинах. Пусть некоторое неизвестное, например x_n, реально входит в систему S. Рассмотрим область $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ – проекцию M на координатную плоскость $x_n = 0$. Предположим, что область $\widetilde{M}$ имеет вершины, и $\widetilde{A}$ – одна из них. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма о вершинах. *Пусть M – выпуклая многогранная область в* $\mathbb{R}^n$, *и* $\widetilde{M}$ *– ее проекция на координатную плоскость* $x_n = 0$, *где* x_n *реально входит в систему неравенств, задающих M. Если обе области имеют вершины, и* $\widetilde{A}$ *– одна из вершин* $\widetilde{M}$, *то среди точек области M, проектирующихся в* $\widetilde{A}$, *обязательно имеется вершина области M.*

Доказательство. Обозначим множество всех точек области M, проектирующихся в $\widetilde{A}$, через $K(\widetilde{A})$. Как показывает доказательство теоремы о проекциях, точки множества $K(\widetilde{A})$ получаются путем дополнения координат $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$ точки $\widetilde{A}$ значениями координаты x_n, удовлетворяющими системе неравенств

$$P_\alpha^0 \geq x_n \geq Q_\beta^0 \quad (\alpha = 1, \ldots, p; \beta = 1, \ldots, q). \tag{7.16}$$

Множество всех решений системы (7.16) есть либо отрезок $[a, b]$, либо лучи $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, либо вся числовая прямая. Последнее невозможно, ибо это означало бы, что в системе (7.12), (7.13), (7.14) блоки (7.12) и (7.13) попросту отсутствуют, т.е. система неравенств S состоит только из блока (7.14). Это, в свою очередь, означало бы, что в систему S неизвестное x_n реально не входит. Однако это, как было сказано ранее, противоречит тому, что по условию M имеет вершины.

Итак, множество всех решений системы (7.16) есть либо $[a, b]$, либо $[a, \infty)$ или $(-\infty, a]$. Покажем, что точка $A = (x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, a)$ является вершиной области[1] M.

Предположим противное, т.е. что A не является вершиной M. Тогда существует отрезок $BC \subset M$, имеющий точку A своей внутренней точкой. Проекция этого отрезка на координатную плоскость $x_n = 0$ есть некоторый отрезок $\widetilde{B}\widetilde{C} \subset \widetilde{M}$, имеющий $\widetilde{A}$ своей внутренней точкой; либо же эта проекция совпадает с $\widetilde{A}$. Первое противоречит тому, что $\widetilde{A}$ – вершина $\widetilde{M}$; второе также невозмож-

[1] Вершину области M иногда называют «крайней точкой». Используя эту терминологию, можно сказать так: если к координатам крайней точки области $\widetilde{M}$ присоединить крайнее значение x_n, то получим крайнюю точку области M.

но, ибо это означало бы, что отрезок BC состоит из точек вида $\left(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, t\right)$, где t изменяется от некоторого $a - \alpha$ до некоторого $a + \beta$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$), а это противоречит сказанному выше о множестве решений системы (7.16).

Доказательство теоремы 7.1. Сразу заметим, что если целевая функция f – константа, то доказывать нечего. Для определенности будем считать, что решается задача нахождения *минимума* f, а значит, функция f ограничена снизу на X. Рассмотрим вначале случай, когда $f(x) = x_1$. Проекция множества X на координатную прямую x_1 (т.е. на плоскость $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$) есть выпуклая многогранная область в $\mathbb{R}^1$. Последняя в силу ограниченности x_1 снизу есть либо отрезок $[a, b]$, либо луч $[a, \infty)$. В обоих случаях $\min f = a$.

Пусть теперь $f(x) = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ – какая угодно линейная функция. Хотя бы один из коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ не равен нулю; пусть, например, $a_1 \neq 0$. Перейдем тогда в пространстве $\mathbb{R}^n$ к новым координатам по формулам

$$\begin{aligned} &y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \\ &y_2 = x_2, \\ &.\quad .\quad . \\ &y_n = x_n, \end{aligned}$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} &x_1 = \frac{1}{a_1}\left(y_1 - a_0 - a_2y_2 - \ldots - a_ny_n\right), \\ &x_2 = y_2, \\ &.\quad .\quad . \\ &x_n = y_n. \end{aligned}$$

Очевидно, любое линейное неравенство с переменными $x_1, \ldots, x_n$ перепишется в виде линейного неравенства с $y_1, \ldots, y_n$, поэтому выпуклая многогранная область X в координатах $x_1, \ldots, x_n$ превратится в выпуклую многогранную область Y в координатах $y_1, \ldots, y_n$. При этом $f = y_1$, а, значит, по доказанному, f достигает минимума в Y. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы 7.2. Предположим, что решается задача о нахождении минимума. Ограничимся случаем $f = x_1$; общий случай сводится к этому частному при помощи приема, указанного в доказательстве теоремы 7.1.

Как и ранее, систему ограничений данной задачи обозначим через S и соответствующую выпуклую многогранную область в $\mathbb{R}^n$ – через M.

Выберем одну из неизвестных x_i, реально входящую в систему S – но только не x_1 – и спроектируем M на координатную плоскость $x_i = 0$. Обозначим проекцию через $M^{(1)}$, а соответствующую систему неравенств в $\mathbb{R}^{n-1}$ – через $S^{(1)}$. Снова выберем одну из неизвестных, реально входящую в $S^{(1)}$ – опять-таки не x_1 – и спроектируем $M^{(1)}$ на соответствующую координатную плоскость. Получим область $M^{(2)} \subset \mathbb{R}^{n-2}$. И так далее, пока не придем к некоторой области $M^{(k)}$ в пространстве $\mathbb{R}^1$, т.е. на числовой прямой, определенной с помощью некоторой системы линейных неравенств с одной переменной x_1.

Учитывая, что минимум $f = x_1$ существует, получим, что множество решений последней системы есть либо $[a, b]$, либо $[a, \infty)$, где $a = \min x_1$. Используя лемму о вершинах, дополним значение $x_1 = a$ значениями некоторых «реальных» неизвестных (значения «нереальных» неизвестных выбираем произвольно) и получим вершину области M. Для этой вершины координата x_1 равна $a = \min f$, что и требовалось доказать.

Оптимальная вершина получается последовательным дополнением значения $x_1 = a$ крайними значениями остальных переменных. В этом отношении нахождение оптимальной вершины полностью аналогично обратному ходу метода Гаусса.

З а м е ч а н и е. На самом деле можно показать, что в данном случае «нереальных» неизвестных не будет и процесс исключения состоит ровно из n шагов. Действительно, при наличии «нереальных» неизвестных среди чисел $x_1^0, \ldots, x_n^0$ – координат вершины имеются такие, которые можно варьировать, т.е. менять произвольным образом. Очевидно, это означает, что в исходную систему ограничений S эти неизвестные реально не входят. Отсюда, в свою очередь, следует, что область M, вопреки условию, не имеет вершин.

Для полноты приведем доказательство теоремы 7.2, опирающееся на геометрическую интуицию. Прежде всего установим такую лемму.

Лемма. *Пусть X – выпуклое многогранное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для существования хотя бы одной вершины множества X необходимо и достаточно, чтобы X не содержало прямых.*

Доказательство. Мы должны доказать два утверждения.

1. Если X имеет вершину, то X не содержит прямых.

2. Если X не имеет вершин, то X содержит прямую.

Докажем первое утверждение. Пусть существует вершина $A \in X$. Рассуждая от противного, допустим, что X содержит некоторую прямую l. Очевидно, $A \notin l$ (иначе A не была бы вершиной X). Рассмотрим двумерную плоскость П (рис. 7.1), содержащую A и l: если A_1, A_2 – две точки на l, то П состоит из всех точек вида $A + t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2$, где $\vec{p}_1 = \overrightarrow{AA_1}$, $\vec{p}_2 = \overrightarrow{AA_2}$, а t_1 и t_2 – любые числа. Плоскость П можно рассматривать как пространство $\mathbb{R}^2$ с координатами t_1, t_2. Пересечение $Y = X \cap П$ есть выпуклая многогранная (лучше сказать – многоугольная) область в $\mathbb{R}^2$: действительно, любое линейное неравенство $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \le c$ из числа тех, что задают X, после замены переменных $x_1, \ldots, x_n$ линейными функциями от t_1, t_2 превращается в линейное неравенство относительно t_1, t_2. Итак, Y есть выпуклая многогранная область в $\mathbb{R}^2$, имеющая вершину A и содержащая прямую l. Непосредственно очевидно, что в $\mathbb{R}^2$ такая область невозможна.

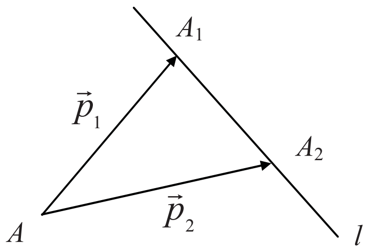

Рис. 7.1

Докажем второе утверждение. Пусть множество X не имеет вершин. Из всех неравенств, задающих X, оставим только существенные, т.е. такие, которые нельзя удалить, не изменив X. Рассмотрим одну из граней X_1 множества X; это означает, что одно из существенных неравенств, задающих X, заменяется равенством. Если в X_1 имеется прямая, доказывать нечего.

Пусть в X_1 нет прямых. Рассмотрим грань X_2 множества X_1. Если в X_2 имеется прямая, доказывать нечего. Рассмотрим грань X_2 множества X_3 и т.д. Продолжая это рассуждение, придем к множеству $X_k \subset X$, задающемуся только уравнениями (неравенств нет). Если X_k содержит две различные точки A_1 и A_2, то содержит и всю прямую A_1A_2. Действительно, X_k есть пересечение нескольких гиперплоскостей, но если гиперплоскость содержит две точки A_1 и A_2, то содержит и все точки $\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2$, где $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (проверьте!), т.е. содержит всю прямую A_1A_2. Получается, что X_k содержит прямую, что и требовалось доказать. В случае же, когда X_k состоит из единственной точки, эта точка есть вершина X (см. способ нахождения вершин в § 6.9), чего не может быть по условию. Лемма доказана.

Завершим теперь доказательство теоремы 7.2. Так как множество X имеет вершины, то оно не содержит прямых. Следовательно, подмножество X^*, для которого $f = (c, x) = \min$, тоже не содержит прямых, а значит, X^* имеет вершины. Остается показать, что любая вершина X^* является одновременно вершиной X. Предположим противное: x_0 – вершина X^*, но не вершина X. Тогда найдутся такие точки $A_1 \in X$, $A_2 \in X$, что x_0 – внутренняя точка отрезка A_1A_2. Так как x_0 – вершина X^*, то A_1 и A_2 не могут одновременно принадлежать X^*. Следовательно, из двух неравенств $f(A_1) \geq f_{\min}$ и $f(A_2) \geq f_{\min}$ хотя бы одно должно быть строгим. Отсюда вытекает, что для любого числа α из интервала (0, 1) выполняется неравенство

$$\alpha f(A_1) + (1-\alpha) f(A_2) > f_{\min}.$$

С другой стороны, $x_0 = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$, так как x_0 – внутренняя точка отрезка A_1A_2. Поэтому

$$f_{\min} = f(x_0) = (c, \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2) =$$
$$= \alpha(c, A_1) + (1-\alpha)(c, A_2) = \alpha f(A_1) + (1-\alpha) f(A_2),$$

что противоречит полученному выше неравенству. Следовательно, всякая вершина множества X^* является вершиной множества X. Теорема 7.2 доказана.

Системы линейных ограничений, возникающие в экономических приложениях, почти всегда содержат условия неотрицательности для всех переменных. В этом случае нетрудно доказать, что допустимое множество имеет хотя бы одну угловую точку (если только оно непусто). С учетом этого замечания теорема 7.2 может быть переформулирована следующим образом:

Теорема 7.2′. *Если в задаче линейного программирования все переменные подчинены условиям неотрицательности и целевая функция $f(x)$ ограничена на допустимом множестве X, то угловая точка X, в которой $f(x)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение среди всех угловых точек X, является оптимальным решением данной задачи.*

§ 7.3. Примеры решения задачи линейного программирования путем последовательного исключения неизвестных

Будем решать задачу линейного программирования (ЛП), заданную в *стандартной* форме. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 7.1. Решить задачу ЛП

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + x_2 + 4.$$

Для рассматриваемого метода не важно, какой вид экстремума находится для целевой функции z – максимум или минимум.

Решение. Шаг 1. Выразим неизвестную x_2 из равенства для целевой функции и подставим это выражение во все ограничения, включая и тривиальные. Затем приведем подобные члены и выразим неизвестную x_1 из всех неравенств системы. Получим

$$x_2 = -3x_1 + z - 4,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_1 + z - 4 \ge 4, \\ 4x_1 + 15x_1 - 5z + 20 \le 10, \\ x_1 - 3x_1 + z - 4 \le 7, \\ -3x_1 + z - 4 \ge 0, x_1 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z - 8 \ge x_1, \\ \frac{5}{19}z - \frac{10}{19} \ge x_1, \\ x_1 \ge \frac{1}{2}z - \frac{11}{2}, \\ \frac{1}{3}z - \frac{4}{3} \ge x_1, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

Шаг 2. Исключим переменную x_1 из предыдущей системы неравенств, а именно для каждого неравенства со знаком $\ge$ найдем неравенство с противоположным знаком и запишем сквозное неравенство. Получим систему из шести неравенств

$$\begin{cases} z-8 \ge \frac{1}{2}z-\frac{11}{2}, \\ z-8 \ge 0, \\ \frac{5}{19}z-\frac{10}{19} \ge \frac{1}{2}z-\frac{11}{2}, \\ \frac{5}{19}z-\frac{10}{19} \ge 0, \\ \frac{1}{3}z-\frac{4}{3} \ge \frac{1}{2}z-\frac{11}{2}, \\ \frac{1}{3}z-\frac{4}{3} \ge 0, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} z \ge 5, \\ z \ge 8, \\ z \le 21, \\ z \ge 2, \\ z \le 25, \\ z \ge 4. \end{cases}$$

Из последней системы неравенств находим $\min z = 8$ и $\max z = 21$. Осталось определить значения неизвестных x_1 и x_2, при которых достигаются экстремальные значения целевой функции z.

Значение $\min z$ получилось из второго неравенства последней системы. Следовательно, это неравенство обращается в равенство. Возвращаясь к шагу 1, убеждаемся, что оно получилось из сквозного неравенства $z - 8 \ge x_1 \ge 0$. Заменим знаки неравенств знаками равенства (поскольку крайние члены равны) и получим искомое значение переменной $x_1 = 0$. Теперь из выражения для целевой функции найдем $x_2 = 4$. Таким образом, $\min z = z(0; 4) = 8$.

Максимальное значение целевой функции получилось из третьего неравенства последней системы, которое, в свою очередь, получилось из сквозного неравенства $\frac{5}{19}z-\frac{10}{19} \ge x_1 \ge \frac{1}{2}z-\frac{11}{2}$. Подставляя найденное значение $z = 21$, имеем $5 \ge x_1 \ge 5$, откуда $x_1 = 5$. Теперь из выражения для целевой функции найдем $x_2 = 2$, так что окончательно $\max z = z(5; 2) = 21$.

Случай неограниченной функции разбирается аналогично. Просто в заключительной системе неравенств для целевой функции z все неравенства получаются односторонними. Для полноты изложения приведем соответствующий пример без комментариев.

Пример 7.2. Решить задачу ЛП

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 1, \quad x_1, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2.$$

Р е ш е н и е . Шаг 1. Как и в примере 7.1, исключаем переменную x_2. Для этого выражаем ее из записи для целевой функции и подставляем в остальные неравенства системы.

$$x_2 = z - x_1,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - z + x_1 \ge 2, \\ -x_1 + 2z - 2x_1 \ge 2, \\ x_1 - z + x_1 \le 1, \\ z - x_1 \ge 0, \quad x_1 \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 - z \ge 2, \\ -3x_1 + 2z \ge 2, \\ 2x_1 - z \le 1, \\ x_1 - z \le 0, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \ge \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}, \\ \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \ge x_1, \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \ge x_1, \\ z \ge x_1, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

На этом закончился первый шаг процедуры исключения неизвестных. На следующем этапе записываем сквозные неравенства.

Шаг 2. Решаем неравенства относительно z.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \ge \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}, \\ \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \ge 0, \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \ge \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \ge 0, \\ z \ge \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}, \\ z \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} z \ge 4, \\ z \ge 1, \\ z \ge 1, \\ z \ge -1, \\ z \ge 1, \\ z \ge 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\min z = z(2;\ 2) = 4$. Вместе с тем целевая функция неограничена сверху и $\max z = \infty$.

Если исходная система ограничений была несовместна, то это эквивалентно тому, что заключительная система ограничений для z будет несовместна. Рассмотрим пример.

Пример 7.3. Решить задачу ЛП

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 - x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \quad x_1, x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$z = 2x_1 + x_2.$$

Решение. Шаг 1. Находим переменную x_2 из выражения для целевой функции и подставляем во все неравенства.

$$x_2 = z - 2x_1,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2z - 4x_1 \le 1, \\ 2x_1 - z + 2x_1 \le 5, \\ x_1 + z - 2x_1 \ge 2, \\ z - 2x_1 \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \ge \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{4}z + \frac{5}{4} \ge x_1, \\ z - 2 \ge x_1, \\ \frac{1}{2}z \ge x_1, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

Шаг 2. Решаем неравенства относительно z.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}z + \frac{5}{4} \ge \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{4}z + \frac{5}{4} \ge 0, \\ z - 2 \ge \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}, \\ z - 2 \ge 0, \\ \frac{1}{2}z \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{19}{5} \ge z, \\ z \ge -5, \\ z \ge 5, \\ z \ge 2, \\ 2 \ge z, \\ z \ge 0. \end{cases}$$

Очевидно, что в последней системе неравенств третье и пятое неравенства противоречат друг другу, поэтому исходная система ограничений несовместна.

Рассмотрим последний пример, когда решение существует, но достигается на грани соответствующего многогранника.

Пример 7.4. Решить задачу ЛП

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12, \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 12, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 \le 25, \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3.$$

Решение. Шаг 1.

$$x_3 = z - x_1 - x_2,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2z - 2x_1 - 2x_2 \le 12, \\ 4x_1 - 4x_2 - 3z + 3x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 5x_1 + 5x_2 + z - x_1 - x_2 \le 25, \\ z - x_1 - x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 + 2z \le 12, \\ 7x_1 - x_2 - 3z \le 12, \\ 4x_1 + 4x_2 + z \le 25, \\ x_1 + x_2 - z \le 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12 - 2z \ge x_2, \\ x_2 \ge -12 + 7x_1 - 3z, \\ \dfrac{25}{4} - x_1 - \dfrac{1}{4}z \ge x_2, \\ -x_1 + z \ge x_2, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Шаг 2.

$$\begin{cases} 12 - 2z \ge -12 + 7x_1 - 3z, \\ 12 - 2z \ge 0, \\ \dfrac{25}{4} - x_1 - \dfrac{1}{4}z \ge -12 + 7x_1 - 3z, \\ \dfrac{25}{4} - x_1 - \dfrac{1}{4}z \ge 0, \\ -x_1 + z \ge -12 + 7x_1 - 3z, \\ \dfrac{25}{4} - x_1 - \dfrac{1}{4}z \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \le \dfrac{24}{7} + \dfrac{1}{7}z, \\ z \le 6, \\ x_1 \le \dfrac{73}{32} + \dfrac{11}{32}z, \\ x_1 \le \dfrac{25}{4} - \dfrac{1}{4}z, \\ x_1 \le \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}z, \\ 0 \le x_1. \end{cases}$$

Шаг 3.

$$\begin{cases} 0 \le 24 + z, \\ z \le 6, \\ 0 \le 73 + 11z, \\ 0 \le 25 - z, \\ 0 \le 3 + z, \\ 0 \le z. \end{cases}$$

Отсюда получим $0 \le z \le 6$. Следовательно, $\min z = 0$, $\max z = 6$. Очевидно, что $\min z$ достигается при значениях переменных $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

При нахождении значений неизвестных, для которых достигается максимум целевой функции, мы сразу попадем на шаг 1, откуда ясно, что $x_2 = 0$. Подставляя $z = 6$, $x_2 = 0$ в систему неравенств шага 1, получим такую систему:

$$\begin{cases} 7x_1 \le 30, \\ 4x_1 \le 19, \\ x_1 \le 6, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

Отсюда получим двойное неравенство $0 \le x_1 \le 4\frac{2}{7}$. Наконец, значение переменной x_3 находится из выражения для целевой функции: $x_3 = 6 - x_1$. Таким образом,

$$\max z = z\left(0 \le x_1 \le 4\frac{2}{7}; 0; 6 - x_1\right) = 6 .$$

Полагая $x_1 = 0$ и $x_1 = 4\frac{2}{7}$, получим две вершины многогранника, в которых достигается максимум целевой функции:

$$\max z = z(0;\ 0;\ 6) = 6 \text{ и } \max z = z\left(4\frac{2}{7}; 0; 1\frac{5}{7}\right) = 6 .$$

Подведем некоторые итоги. Пусть дана задача линейного программирования в стандартной форме:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\
x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0,
\end{cases}
\tag{7.17}
$$

$$
z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_0. \tag{7.18}
$$

Геометрическое истолкование задачи (7.17), (7.18) состоит в том, что неравенства (7.17) задают выпуклое многогранное тело в пространстве $\mathbb{R}^n$, на котором рассматривается экстремум целевой функции (7.18).

При обсуждении примеров в первой части § 7.3 задача (7.17), (7.18) рассматривалась как единое целое в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ основных переменных $x_1, \ldots, x_n$ и параметра z. Иными словами, фигурную скобку в условиях (7.17) следует продлить и на целевую функцию (7.18). В этом пространстве геометрический образ задачи (7.17), (7.18) – это выпуклое многогранное тело V. Задача о нахождении диапазона значений функции z – это задача о проектировании тела V на ось z. В частности, поскольку проекция выпуклого замкнутого множества остается выпуклым и замкнутым, то множество значений z либо пусто, либо ограничено, и тогда оно есть отрезок, либо неограничено, и тогда оно представляет собой луч $[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$. Отсюда понятно, как получились доказательства теорем 7.1 и 7.2.

§ 7.4. Строение множества оптимальных решений

Напомним, что допустимое множество X в задаче линейного программирования задается системой линейных ограничений в $\mathbb{R}^n$ и поэтому является выпуклой многогранной областью. Напомним также, что ограниченная выпуклая многогранная область называется выпуклым многогранником. Справедлива следующая теорема о строении выпуклых многогранников.

Теорема 7.3. *Выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой своих угловых точек.*

Доказательство. Пусть выпуклый многогранник X задан системой S линейных неравенств. Условимся называть неравенство $(c, x) \le \alpha$ системы S *существенным*, если при удалении этого неравенства из S соответствующая многогранная область изменяется (расширяется). Далее, *гранью* X условимся называть часть X, получаемую заменой существенного неравенства $(c, x) \le \alpha$ равенством $(c, x) = \alpha$. Разумеется, грань X тоже является выпуклым многогранным множеством.

Прежде всего докажем, что если Г – грань множества X, то любая вершина Г является и вершиной X.

Пусть A – вершина Г и пусть BC – отрезок, имеющий A своей внутренней точкой. Возможны два случая.

1. Отрезок BC не принадлежит целиком “несущей” гиперплоскости $(c, x) = \alpha$ грани Г. Тогда для одной из точек B, C выполняется неравенство $(c, x) > \alpha$, а для другой – $(c, x) < \alpha$. Следовательно, отрезок BC не принадлежит целиком X.

2. Отрезок BC принадлежит целиком гиперплоскости $(c, x) = \alpha$. Тогда этот отрезок не может принадлежать целиком Г (ведь точка A – вершина Г), а значит, не принадлежит целиком и X.

Это доказывает, что точка A есть вершина X.

Доказательство теоремы по существу копирует рассуждения, приведенные в § 6.3 (см. рис. 6.7). Пусть $M \in X$ – произвольная точка. Докажем, что M является выпуклой комбинацией угловых точек X. Если M – угловая точка множества X, то это утверждение очевидно. Если M – не угловая точка, то найдется отрезок AB, содержащийся в X, для которого M – внутренняя точка. Продолжим отрезок AB в обе стороны до пересечения с гранями множества X. Пусть C – пересечение прямой AB с гранью F_1, D – пересечение прямой AB с гранью F_2. Пусть $V_1, V_2, ..., V_r$ – угловые точки грани F_1; $W_1, W_2, ..., W_s$ – угловые точки грани F_2. Так как множества F_1 и F_2 ограничены и задаются меньшим числом неравенств, чем X, то для них утверждение теоремы можно считать выполненным. Поэтому для подходящих неотрицательных чисел $c_1, c_2, ..., c_r$ с единичной суммой имеем $C = c_1V_1 + c_2V_2 + ... + c_rV_r$. Аналогично для подходящих неотрицательных чисел $d_1, d_2, ..., d_s$ с единичной суммой имеем $D = d_1W_1 + d_2W_2 + ... + d_sW_s$. Далее, точка M принадлежит отрезку CD, поэтому для некоторых $\alpha \ge 0$ и $\beta = 1 - \alpha \ge 0$ имеем $M = \alpha C + \beta D$. Отсюда получаем, что

$$M = \alpha c_1 V_1 + \alpha c_2 V_2 + ... + \alpha c_r V_r + \beta d_1 W_1 + \beta d_2 W_2 + ... + \beta d_s W_s.$$

Все числа $\alpha c_1, \alpha c_2, ..., \alpha c_r, \beta d_1, \beta d_2, ..., \beta d_s$ неотрицательны, а их сумма

$$\alpha c_1 + \alpha c_2 + ... + \alpha c_r + \beta d_1 + \beta d_2 + ... + \beta d_s =$$
$$= \alpha\left(c_1 + c_2 + ... + c_r\right) + \beta\left(d_1 + d_2 + ... + d_s\right) = \alpha + \beta = 1.$$

Следовательно, точка M – выпуклая комбинация точек $V_1, V_2, ..., V_r, W_1, W_2, ..., W_s$. Эти точки являются угловыми точками X. Теорема доказана.

Теорема 7.4. *Если в задаче линейного программирования допустимое множество X непусто и ограничено, то задача разрешима, а множество всех оптимальных решений* X^* *является выпуклой оболочкой оптимальных угловых точек X.*

Доказательство. Так как X ограничено, то найдется такое число A, что для любой точки $x \in X$ все ее координаты по модулю не превосходят A: $|x_1| \le A, |x_2| \le A, ..., |x_n| \le A.$ Пусть $f(x) = c_0 + (c, x)$ – линейная целевая функция; $C = \max\{|c_1|, |c_2|, ..., |c_n|\}$ – наибольшее значение модуля ее коэффициентов. Имеем неравенство

$$|f(x)| = |c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n| \le$$
$$\le |c_0| + |c_1||x_1| + |c_2||x_2| + \ldots + |c_n||x_n| \le |c_0| + n \cdot C \cdot A.$$

Следовательно, $f(x)$ ограничена и сверху, и снизу на X. По теореме 7.1 имеется хотя бы одно оптимальное решение, т.е. задача разрешима. Пусть X^* – множество всех оптимальных решений. Так как X^* – подмножество X, то X^* – ограниченное множество. По теореме 7.3 множество X^* совпадает с выпуклой оболочкой своих угловых точек. Угловые точки X^* являются и угловыми точками множества X. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что утверждение теоремы 7.4, по крайней мере, в некоторых случаях, остается в силе и при неограниченном допустимом множестве.

Рассмотрим стандартную задачу о диете. Пусть имеются три продукта $П_1, П_2, П_3$, содержащие три питательных вещества A, B и C. Система ограничений записывается так:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \ge a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \ge b, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \ge c, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \end{cases}$$

где a, b, c – минимальные нормы веществ A, B и C; x_1, x_2, x_3 – количества продуктов Π_1, Π_2, Π_3; a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, 3) – содержание питательных веществ в единице продукта Π_i. Целевая функция $f(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$, где p_1, p_2, p_3 – цены продуктов, минимизируется. Далее считаем, что $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$.

Из условия положительности цен следует, что в допустимых точках $f(x) \ge 0$. Следовательно, $f(x)$ ограничена снизу на допустимом множестве. В то же время само допустимое множество неограничено. Это следует из того, что x_1, x_2, x_3 можно неограниченно увеличивать, не нарушая ограничений задачи. Несмотря на это, по теореме 7.1 минимальное значение $f_{\min}$ достигается в некоторой допустимой точке. Каждое оптимальное решение x^* удовлетворяет системе ограничений:

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = f_{\min}, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \end{cases}$$

из которой вытекают такие неравенства:

$$0 \le x_1 \le \frac{f_{\min}}{p_1},\ 0 \le x_2 \le \frac{f_{\min}}{p_2},\ 0 \le x_3 \le \frac{f_{\min}}{p_3}.$$

Следовательно, множество всех оптимальных решений ограничено.

Ясно, что приведенные рассуждения носят общий характер. Поэтому в задаче о диете при любом количестве продуктов и питательных веществ множество оптимальных решений ограничено и совпадает с выпуклой оболочкой оптимальных угловых точек допустимого множества.

§ 7.5. Графический метод решения задачи линейного программирования при малом числе переменных

Графический метод решения задачи линейного программирования в его непосредственной форме применяется только в случае двух переменных. Выпуклая многогранная область X, заданная системой линейных ограничений для двух переменных, является выпуклой многоугольной областью. Ниже угловые точки X называются вершинами.

Пусть область допустимых решений X задается системой неравенств вида

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \ge b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y \ge b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x + a_{m2}y \ge b_m, \end{cases}$$

целевая функция $f = c_0 + c_1x + c_2y$. Предположим, что требуется найти максимум (или минимум) f на множестве X, а также точку, в которой достигается этот максимум (или минимум).

При описании графического метода используется понятие линии уровня: *линией уровня* функции $f(x, y)$ называется множество всех точек (x, y), в которых функция принимает некоторое постоянное значение α. В случае линейной функции $f(x,y) = c_0 + c_1x + c_2y$ все линии уровня являются прямыми, перпендикулярными общему вектору нормали $\vec{c} = (c_1;\ c_2)$.

Графический метод состоит в следующем.

1. Строится множество X всех допустимых решений.

2. Если $X = \varnothing$, то задача неразрешима.

3. Если $X \ne \varnothing$, то рассматриваются прямые уровня $f = \alpha$ при монотонном изменении α от $-\infty$ до $+\infty$. При увеличении α прямая $f = \alpha$ смещается параллельно в направлении вектора $\vec{c}$. Если A – первая точка встречи прямой уровня с областью X, $f(A) = \alpha_0$, то прямая уровня $f(x) = \alpha$ при $\alpha < \alpha_0$ не имеет общих точек с X, откуда следует, что $\alpha_0 = \min f$ на X. Аналогичным образом, если

A – последняя точка пересечения линии уровня с X, то $f(A) = \max f$ на X.

Если первой точки пересечения линии уровня с X не существует (т.е. при всех α из некоторого промежутка вида $(-\infty; \alpha_0]$ прямая $f = \alpha$ пересекает X), то $\min f = -\infty$, и задача на минимум неразрешима. Если не существует последней точки пересечения, то $\max f = +\infty$, и неразрешима задача на максимум.

Таким образом, из чертежа всегда видно, разрешима задача или нет. Из чертежа также видно, имеются ли у допустимого множества вершины. Отметим сразу, что отсутствие вершины – явление довольно редкое, при ограниченной целевой функции допустимое множество X без вершины может быть только двух видов:

1. X – полуплоскость;
2. X – область, ограниченная двумя параллельными прямыми.

Если у X есть хотя бы одна вершина, то (при ограниченной целевой функции) оптимальное значение может быть найдено методом перебора вершин. Для вычисления целевой функции в некоторой вершине V допустимого множества необходимо знать точное значение ее координат. Для определения координат вершины V решается система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{i1}x + a_{i2}y = b_i, \\ a_{j2}x + a_{j2}y = b_j, \end{cases}$$

где i и j – номера прямых, ограничивающих область X, на пересечении которых находится вершина V.

Графический метод позволяет избежать полного перебора вершин. Действительно, если из чертежа видно, что A – *единственная* первая (или последняя) точка пересечения линии уровня с X, то незачем вычислять координаты других вершин, так как A – единственное оптимальное решение. Для некоторых задач, однако, из чертежа не ясно, в какой именно точке линия уровня пересекает в первый раз допустимое множество. В этом случае необходимо найти координаты всех “подозрительных” на оптимальность вершин, вычислить для них значения целевой функции и выбрать из них вершины с оптимальным значением. Заметим, что могут оказаться две оптимальные вершины A и B. Тогда множество всех оптимальных решений X^* – это отрезок AB.

Пусть $\alpha_0 = \max f$ (или $\alpha_0 = \min f$) – оптимальное значение f на X. Множество всех оптимальных решений X^* является подмножеством линии уровня $f = \alpha_0$ и задается системой линейных неравенств. Поэтому возможны лишь следующие случаи:

а) X^* – точка на прямой уровня $f = \alpha_0$;

б) X^* – отрезок на прямой уровня $f = \alpha_0$;

в) X^* – луч, содержащийся в прямой $f = \alpha_0$;

г) X^* совпадает с прямой уровня $f = \alpha_0$.

Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пусть X – квадрат, стороны которого параллельны осям координат. Каждая из его вершин может быть как точкой максимума, так и точкой минимума в зависимости от того, в какой четверти находится вектор $\vec{c}$ (рис.7.2 – 7.5).

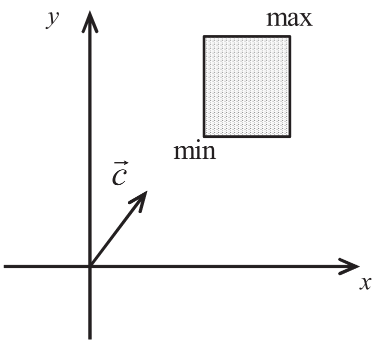

Рис. 7.2

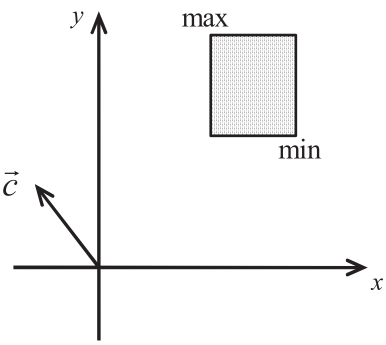

Рис. 7.3

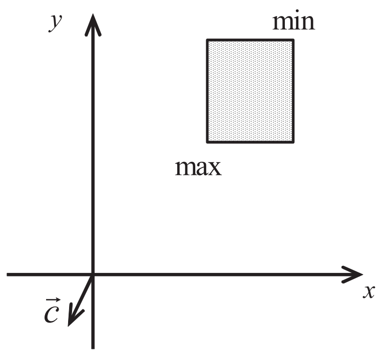

Рис. 7.4

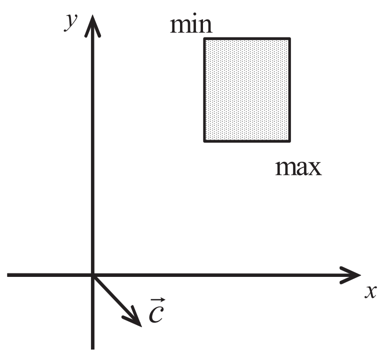

Рис. 7.5

Решим графическим методом задачу о банке из § 7.1:

1) $x + y \le 100$;

2) $x \ge 35$;

3) $y \ge 0,3(x + y)$;

4) $x \ge 0$;

5) $y \ge 0$;

$f = 0,15x + 0,1y \to \max$.

Построим в плоскости Oxy полуплоскости, заданные неравенствами 1) … 5). Общая их часть (заштрихованный треугольник на рис. 7.6) – область X допустимых решений. Построим вектор $\vec{c}$ и прямую уровня, перпендикулярную вектору $\vec{c}$ и проходящую через начало координат. Перемещая эту прямую параллельно в направлении вектора $\vec{c}$, найдем последнюю точку пересечения прямой уровня и допустимого множества X.

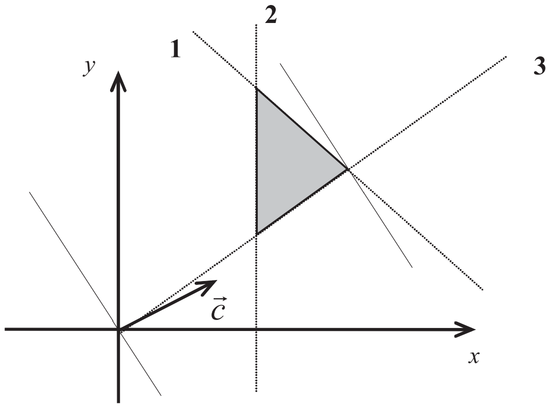

Рис. 7.6

Найденная точка максимума находится на пересечении прямых 1 и 3. Ее координаты получаются решением следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ y = 0,3(x + y). \end{cases}$$

Итак, оптимальный портфель активов (точка максимума) имеет структуру $(x^*, y^*) = (70, 30)$. Максимальная прибыль составит $f_{\max} = f(x^*, y^*) = 0,15 \cdot 70 + 0,1 \cdot 30 = 13,5$.

Рассмотрим теперь случай трех переменных. Для функции $f(x, y, z)$ аналогом линии уровня является *поверхность уровня*, т.е. множество всех точек трехмерного пространства, в которых функция $f(x, y, z)$ принимает определенное значение. Для функции вида $f = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z$ всякая поверхность уровня – это плоскость с вектором нормали $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Теоретически графический метод можно применить и в трехмерном пространстве, заменив прямые уровня на плоскости уровня. На практике, однако, приходится иметь дело с плоскими чертежами, по которым трудно разобраться в характере взаимного расположения допустимого множества и плоскости уровня. Поэтому в следующем примере мы используем метод перебора вершин.

Рассмотрим производственную задачу с тремя продуктами $П_1$, $П_2$, $П_3$ и тремя видами ресурсов R_1, R_2, R_3. Введем обозначения:

b_i – количество доступных единиц ресурса R_i ($i = 1, 2, 3$);

p_j – цена продукта $П_j$ ($j = 1, 2, 3$);

a_{ij} – количество единиц ресурса R_i, расходуемых на производство 1 ед. продукта $П_j$;

x, y, z – количество производимых единиц продуктов $П_1$, $П_2$, $П_3$ соответственно.

Приходим к задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \le b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \le b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \le b_3, \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0, \end{cases} \tag{7.19}$$

$$f = p_1x + p_2y + p_3z \to \max.$$

Считаем, что все ресурсы при производстве продуктов только расходуются, а не производятся, т.е. $a_{ij} \ge 0$. Кроме того, естественно предположить, что при производстве каждого продукта расходуется хотя бы один ресурс. Предположим для определенности, что при производстве каждого продукта $П_j$ расходуется ресурс R_j

(и, возможно, другие ресурсы тоже). Тогда $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ и $a_{33} > 0$. Учитывая неотрицательность a_{ij}, x, y и z, получаем неравенства

$$x \le \frac{b_1}{a_{11}}, \quad y \le \frac{b_2}{a_{22}}, \quad z \le \frac{b_3}{a_{33}}.$$

Следовательно, при самых общих предположениях допустимое множество в производственной задаче ограничено. Поэтому решение задачи сводится к нахождению угловых точек (метод перебора вершин).

Пусть, например, $\vec{b} = (210, 210, 300)$ и

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

а числа p_1, p_2, p_3 конкретно не указаны. Уравнения, отвечающие условиям (7.19), имеют вид

$$2x + y + z = 210, \tag{7.20}$$
$$x + 2y + z = 210, \tag{7.21}$$
$$x + y + 2z = 300, \tag{7.22}$$
$$x = 0, \tag{7.23}$$
$$y = 0, \tag{7.24}$$
$$z = 0. \tag{7.25}$$

Чтобы найти вершины многогранника X, нужно рассмотреть всевозможные подсистемы из трех уравнений, выбрать из них те, которые имеют единственное решение, и проверить, что найденное решение принадлежит X. Чтобы как-то упорядочить этот процесс, рассмотрим четыре случая.

1. Все три координаты x, y, z равны нулю (система (7.23) – (7.25)), что дает вершину $O(0, 0, 0)$.

2. Лишь одна координата равна нулю. Это приводит к вершинам:

$$A(0,\,40,\,130)$$

(система (7.21), (7.22), (7.23));

$$B(40,\,0,\,130)$$

(система (7.20), (7.22), (7.24));

$$C(70,\,70,\,0)$$

(система (7.20), (7.21), (7.25)).

3. Ровно две координаты равны нулю. Это дает вершины

$$D(105,\,0,\,0)$$

(система (7.20), (7.24), (7.25));

$$E(0,\,105,\,0)$$

(система (7.21), (7.23), (7.25));

$$F(0,\,0,\,150)$$

(система (7.22), (7.23), (7.24)).

4. Все три координаты отличны от нуля, что дает вершину

$$H(30,\,30,\,120)$$

(система (7.20), (7.21), (7.22)).

Итак, вершинами допустимого множества являются следующие точки: O, A, B, C, D, E, G и H. Поэтому максимальное значение

$$\begin{gathered} f_{\max} = \max\{f(O), f(A), f(B), f(C), f(D), f(E), f(G), f(H)\} = \\ = \max\{0,\, 40p_2 + 130p_3,\, 40p_1 + 130p_3,\, 70p_1 + 70p_2,\, 105p_1, \\ 105p_2,\, 150p_3,\, 30p_1 + 30p_2 + 120p_3\}. \end{gathered}$$

Множество оптимальных решений совпадает с выпуклой оболочкой тех вершин среди O, A, B, C, D, E, G и H, в которых это максимальное значение достигается.

ГЛАВА 8

РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 8.1. Симплекс-метод

Мы уже указывали, что реальные задачи линейного программирования содержат, как правило, большое число ограничений и неизвестных. Естественно, что решение таких задач связано с большим объемом вычислений и проводится на быстродействующих вычислительных машинах. Алгоритм, лежащий в основе машинной программы, может быть связан со спецификой данного класса задач. Например, для решения транспортной задачи имеются довольно простые алгоритмы, обусловленные особенностями ее системы ограничений. Однако существуют и общие методы, позволяющие найти решение любой задачи линейного программирования за обозримое число шагов. К ним относится прежде всего *симплекс-метод*.

С самого начала укажем, что симплекс-метод в его непосредственной форме предназначен для решения *канонической* задачи линейного программирования.

Итак, рассмотрим задачу линейного программирования с ограничениями в форме уравнений. Даны система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{8.1}$$

m линейных уравнений с n неизвестными и линейная функция

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c. \tag{8.2}$$

Среди неотрицательных решений системы (8.1) нужно найти такое, которое минимизирует функцию (8.2).

Для начала работы по симплекс-методу требуется, чтобы заданная система уравнений была приведена к *допустимому* виду. Это означает, что какие-то из неизвестных должны быть выражены через остальные, причем *свободные члены этих выражений неотрицательны*.

Пример допустимой системы:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_4 + 7x_5 + 5, \\ x_2 = 3x_4 + 6x_5 + 4, \\ x_3 = -x_4 + 2x_5, \end{cases} \tag{8.3}$$

здесь свободные члены равны соответственно 5, 4 и 0. Можно ли привести систему уравнений к допустимому виду и как это сделать, рассмотрим в § 8.2.

Неизвестные в допустимом виде системы, которые выражены через остальные неизвестные, называются *базисными*, а весь набор этих неизвестных, который мы обозначим для краткости одной буквой *Б*, – *допустимым базисом*; остальные неизвестные называются *свободными*. Например, в системе (8.3) допустимый базис образован неизвестными x_1, x_2, x_3; неизвестные же x_4 и x_5 – свободные.

По поводу самой возможности приведения системы (8.1) к допустимому виду заметим пока только следующее. Если система (8.1) совместна, то метод Гаусса позволяет выделить в ней базис неизвестных. Весь вопрос в том, будет ли этот базис допустимым, т.е. будут ли все свободные члены в правых частях уравнений *неотрицательными*. Можно, конечно, попытаться перебрать все возможные базисы неизвестных, чтобы отыскать среди них допустимый, но это весьма трудоемкая работа.

После того как выделен допустимый базис неизвестных, можно в выражении (8.2) для целевой функции заменить каждое базисное неизвестное его выражением через свободные. В итоге функция f запишется через одни лишь свободные неизвестные. Например, если

$$f = 5x_1 - 7x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2,$$

а система ограничений приведена к виду (8.3), то новое выражение для f будет

$$f = 5(-2x_4 + 7x_5 + 5) - 7(3x_4 + 6x_5 + 4) + (-x_4 + 2x_5) - x_4 - x_5 + 2 = \\ = -33x_4 - 6x_5 - 1.$$

Чтобы упростить дальнейшие записи, будем считать, что имеется всего 5 неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и система ограничений приведена к допустимому виду с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \alpha, \\ x_2 = \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0), \\ x_3 = \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5 + \gamma, \end{cases} \tag{8.4}$$

а целевая функция – к виду

$$f = \delta_4 x_4 + \delta_5 x_5 + \delta. \tag{8.5}$$

Напомним, что решается задача о минимизации f при ограничениях (8.4) и условиях $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$

Положим все свободные неизвестные равными нулю

$$x_4 = 0,\ x_5 = 0$$

и найдем из системы (8.4) значения базисных неизвестных:

$$x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \gamma.$$

Полученное таким путем решение системы (8.4)

$$(\alpha, \beta, \gamma, 0, 0) \tag{8.6}$$

будет неотрицательным; оно называется *базисным решением*, отвечающим базису $\{x_1, x_2, x_3\}$. Для базисного решения значение функции f равно $f_Б = \delta$.

Возможны три случая.

I. *Все коэффициенты при свободных неизвестных в выражении для f неотрицательны*: $\delta_4 \geq 0,\ \delta_5 \geq 0.$ Тогда для любого неотрицательного решения системы (8.4) имеем $\delta_4 x_4 \geq 0,\ \delta_5 x_5 \geq 0,$ значит, $f = \delta_4 x_4 + \delta_5 x_5 + \delta \geq \delta.$ Таким образом, $\min f = \delta,$ т.е. *базисное решение является оптимальным* – задача решена.

II. *Имеется свободное неизвестное, коэффициент при котором в выражении f отрицателен, а все коэффициенты при этом неизвестном в уравнениях* (8.4) *неотрицательны*.

Пусть, например, $\delta_4 < 0,$ а $\alpha_4 \geq 0,\ \beta_4 \geq 0,\ \gamma_4 \geq 0.$ Будем тогда, отправляясь от базисного решения (8.6), наращивать значение x_4 (не меняя $x_5 = 0$). Значения базисных неизвестных также будут меняться; мы получим

$$x_1 = \alpha_4 x_4 + \alpha \geq \alpha \geq 0,$$
$$x_2 = \beta_4 x_4 + \beta \geq \beta \geq 0,$$
$$x_3 = \gamma_4 x_4 + \gamma \geq \gamma \geq 0,$$

т.е. решение $(x_1, x_2, x_3, x_4, 0)$ будет оставаться неотрицательным. При этом $f = \delta_4 x_4 + \delta,$ и ввиду того, что $\delta_4 < 0,$ значение f с ростом x_4 будет неограниченно уменьшаться. Таким образом, в этом случае $\min f = -\infty,$ т.е. *задача решения не имеет*.

III. *Имеется свободное неизвестное*, *коэффициент при котором в f отрицателен*, *но и среди коэффициентов при этом неизвестном в уравнениях* (8.4) *также есть отрицательные*.

В этом случае производится *шаг*, а именно от базиса *Б* мы переходим к новому базису $Б'$ с таким расчетом, чтобы значение $f_Б$ уменьшилось или, по крайней мере, не увеличилось: $f_{Б'} \leq f_Б$. Разумеется, изменение базиса влечет за собой соответствующую перестройку систем (8.4) ограничений и выражения (8.5) для функции *f*.

Опишем конкретно содержание *шага*. Пусть, например, α_4 и β_4 отрицательны, а γ_4 – положительно или равно 0:

$$\alpha_4 < 0,\ \beta_4 < 0,\ \gamma_4 \geq 0. \tag{8.7}$$

Если снова, как в случае II, наращивать значение x_4, то будем иметь

$$x_1 = \alpha_4 x_4 + \alpha,$$
$$x_2 = \beta_4 x_4 + \beta,$$
$$x_3 = \gamma_4 x_4 + \gamma.$$

Поскольку $\alpha_4 < 0$ и $\beta_4 < 0$, значения x_1 и x_2 будут уменьшаться, а значение x_3 будет оставаться неотрицательным (так как по-прежнему $x_3 \geq \gamma$). При наращивании x_4 наступит момент, когда одно из неизвестных x_1 или x_2 обратится в нуль: для x_1 таким моментом будет $x_4 = -\dfrac{\alpha}{\alpha_4}$, а для x_2 будет $x_4 = -\dfrac{\beta}{\beta_4}$. Выберем из этих отношений $-\dfrac{\alpha}{\alpha_4}$, $-\dfrac{\beta}{\beta_4}$ наименьшее; пусть, например, это будет $-\dfrac{\alpha}{\alpha_4} = \rho$. Тогда наращивание x_4 возможно только от 0 до ρ. При $x_4 = \rho$ неизвестное x_1 обратится в нуль, а при дальнейшем росте x_4 неизвестное x_1 станет уже отрицательным, что допускать нельзя. Полагая в системе (8.4) $x_4 = \rho$ и $x_5 = 0$, получим неотрицательное решение

$$x_1 = 0,\ x_2 = \beta_4\rho + \beta,\ x_3 = \gamma_4\rho + \gamma,\ x_4 = \rho,\ x_5 = 0, \tag{8.8}$$

для которого значение функции f будет $\delta_4\rho + \delta \leq \delta$ (поскольку $\delta_4 < 0$ и $\rho \geq 0$).

Таким образом, с ростом x_4 "первым" из базисных неизвестных обращается в нуль неизвестное x_1. Это служит для нас сигналом к замене базиса $Б = \{x_1, x_2, x_3\}$ на $Б' = \{x_4, x_2, x_3\}$, а именно: из старого базиса удаляется неизвестное x_1 и вместо него в базис вводится неизвестное x_4 (из числа прежних свободных).

Смена базиса, как уже говорилось, влечет за собой перестройку системы (8.4). Из первого уравнения (для x_1) выражаем x_4:

$$x_4 = \frac{1}{\alpha_4} x_1 - \frac{\alpha_5}{\alpha_4} x_5 - \frac{\alpha}{\alpha_4} \tag{8.9}$$

и подставляем это выражение для x_4 в остальные два уравнения. В итоге получим систему вида

$$\begin{cases} x_4 = a_1 x_1 + a_5 x_5 + a, \\ x_2 = b_1 x_1 + b_5 x_5 + b, \\ x_3 = c_1 x_1 + c_5 x_5 + c \end{cases} \tag{8.10}$$

с базисным решением

$$x_1 = 0,\ x_2 = b,\ x_3 = c,\ x_4 = a,\ x_5 = 0, \tag{8.11}$$

которое должно совпадать с решением (8.8), поскольку, как видно из самой системы (8.9), двух разных решений с условиями $x_1 = 0, x_5 = 0$ быть не может. Таким образом, базисное решение (8.10) является снова неотрицательным.

Что же касается нового значения функции *f*, то оно равно

$$f_{Б'} = \delta_4 \rho + \delta \tag{8.12}$$

и, таким образом, $f_{Б'} \leq f_Б$ (следует учесть, что $\delta_4 < 0$ и поэтому $\delta_4 \rho + \delta \leq \delta$). Итак, с переходом от базиса *Б* к $Б'$ система ограничений сохранила допустимую форму ((8.10), где $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$), а значение функции *f* для базисного решения уменьшилось или осталось прежним.

Переход от базиса *Б* к новому базису $Б'$ и означает *шаг*, который, напомним, делается в случае III. Разумеется, старое выражение для *f*, т.е. (8.5), должно быть теперь заменено новым:

$$f = d_1 x_1 + d_5 x_5 + d, \tag{8.13}$$

которое получается из (8.5) заменой неизвестного x_4 по формуле (8.9).

Если для полученной задачи (8.10), (8.13) снова имеет место случай III, то делаем следующий *шаг*, т.е. переходим к новому базису $Б''$, для которого $f_{Б''} \le f_{Б'}$.

Шаги повторяются до тех пор, пока не придем к одному из случаев I или II. Тогда процесс заканчивается.

Пример 8.1. Решить задачу $f = x_4 - x_5 \to \min$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5, \end{cases} \tag{8.14}$$

$$x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Решение. Здесь неизвестные x_1, x_2, x_3 образуют допустимый базис, а функция f выражена через свободные неизвестные x_4 и x_5.

Среди коэффициентов при свободных неизвестных в выражении f имеется отрицательное число – это коэффициент при x_5. Просматривая коэффициенты при x_5 в уравнениях (8.14), мы видим, что и среди них есть отрицательные. Следовательно, перед нами случай III, и в соответствии с изложенной выше методикой необходимо сделать *шаг*. Выбрав уравнения с отрицательными коэффициентами при x_5, – а это второе и третье уравнения, составляем для каждого из них отношение свободного члена к коэффициенту при x_5, взятому со знаком минус. Получим два отношения:

$$\frac{2}{1} \text{ и } \frac{3}{1},$$

из которых меньшим является отношение $\frac{2}{1}$, отвечающее уравнению для x_2.

Производим замену базиса по схеме $x_2 \leftrightarrow x_5$, что означает: вместо x_2 в базис вводится x_5. Новый базис теперь состоит из

x_1, x_5, x_3. Чтобы осуществить соответствующую перестройку системы (8.14), нужно выразить эти неизвестные через x_2 и x_4.

Начинаем с уравнения для x_2, из которого выражаем x_5 (новое базисное неизвестное):

$$x_5 = 2 + 2x_4 - x_2;$$

затем выражаем x_1, x_3 и f:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 + 2(2 + 2x_4 - x_2), \\ x_3 &= 3 - 3x_4 - (2 + 2x_4 - x_2), \\ f &= x_4 - (2 + 2x_4 - x_2). \end{aligned}$$

Итак, задача приведена к виду

$$\begin{cases} x_1 = 5 + 3x_4 - 2x_2, \\ x_5 = 2 + 2x_4 - x_2, \\ x_3 = 1 - 5x_4 + x_2 \end{cases} \tag{8.15}$$

(мы сохранили порядок уравнений в (8.14)) и

$$f = -2 - x_4 + x_2. \tag{8.16}$$

Для полученной задачи снова имеем случай III, так как коэффициент при x_4 в выражении *f* отрицателен и среди коэффициентов при x_4 в уравнениях (8.15) также имеются отрицательные. Последним является коэффициент при x_4 только в одном уравнении – для x_3, поэтому производим замену базиса по схеме $x_3 \leftrightarrow x_4$.

Из третьего уравнения выражаем x_4 и подставляем это выражение в остальные уравнения и в функцию *f*. В итоге получим:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{28}{5} - \dfrac{3}{5}x_3 - \dfrac{7}{5}x_2, \\ x_5 = \dfrac{12}{5} - \dfrac{2}{5}x_3 - \dfrac{3}{5}x_2, \\ x_4 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5}x_3 + \dfrac{1}{5}x_2, \end{cases} \tag{8.17}$$

$$f=-\frac{11}{5}+\frac{1}{5}x_3+\frac{4}{5}x_2. \qquad (8.18)$$

Выкладки предоставляем читателю провести самостоятельно.

Для полученной задачи имеет место случай I, так как оба коэффициента при свободных неизвестных в выражении f неотрицательны. Это означает, что последнее базисное решение

$$x_1=\frac{28}{5},\ x_5=\frac{12}{5},\ x_4=\frac{1}{5},\ x_2=x_3=0$$

является оптимальным, а искомый минимум f равен $-\frac{11}{5}$. Итак, оптимальное решение есть

$$\left(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

и $\min f=-\frac{11}{5}$. Задача решена.

В разобранном примере 8.1 процесс закончился случаем I, т.е. нахождением оптимального решения. Однако встречается еще одна возможность окончания процесса – когда наступает случай II, тогда $\min f=-\infty.$ Разберем пример.

Пример 8.2. Решить задачу $f=-x_1-x_2\to\min$ при условиях

$$\begin{cases} x_3=1+x_1-x_2, \\ x_4=2-x_1+2x_2, \end{cases} \qquad (8.19)$$

$$x_i\geq 0\quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Решение. Здесь имеем случай III, так как коэффициент при x_1 в выражении для f отрицателен и среди коэффициентов при x_1 в уравнениях тоже есть отрицательный. Производя смену базиса по схеме $x_4\leftrightarrow x_1$, получим задачу

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_4 + x_2, \\ x_1 = 2 - x_4 + 2x_2, \end{cases}$$
$$f = -2 + x_4 - 3x_2.$$

Для этой задачи имеем случай II, так как при неизвестном x_2 коэффициент в выражении f отрицателен, а в каждом из уравнений – неотрицателен. Следовательно, $\min f = -\infty$, и оптимального решения не существует.

§ 8.2. Симплекс-таблицы

Производя расчеты по симплекс-методу, нет необходимости выписывать все вычисления столь подробно, как мы делали это в предыдущих примерах. Оказывается, весь процесс можно записать в виде последовательности однотипно заполняемых таблиц, причем каждому шагу будет отвечать переход к следующей таблице.

Описание симплекс-таблиц произведем на примере задачи (8.4), (8.5) из § 8.1, где требуется минимизировать функцию (8.5) при ограничениях (8.4) и условиях $x_i \geq 0 \ (i = 1, ..., 5)$.

Для заполнения первой таблицы необходимо в каждом из уравнений (8.4) перенести все члены, кроме свободного, из правой части в левую, т.е. записать (8.4) в виде[1]

$$\begin{cases} x_1 & & & - & \alpha_4 x_4 & - & \alpha_5 x_5 & = & \alpha, \\ & x_2 & & - & \beta_4 x_4 & - & \beta_5 x_5 & = & \beta, \\ & & x_3 & - & \gamma_4 x_4 & - & \gamma_5 x_5 & = & \gamma. \end{cases} \tag{8.20}$$

Аналогичную работу следует проделать и с равенством (8.5):

$$f - \delta_4 x_4 - \delta_5 x_5 = \delta.$$

Теперь можно заполнить табл. 8.1.

---

[1] Про систему типа (8.20) часто говорят, что в ней столбцы коэффициентов при базисных неизвестных образуют *единичный базис*; имеется в виду, что эти столбцы совпадают в некотором порядке со столбцами единичной матрицы E.

Заглавная строка таблицы и характер заполнения, не считая стрелок, в комментариях не нуждаются. Расстановку стрелок поясним ниже.

Таблица 8.1

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	α	1	0	0	$\boxed{-\alpha_4}$	$-\alpha_5$
x_2	β	0	1	0	$-\beta_4$	$-\beta_5$
x_3	γ	0	0	1	$-\gamma_4$	$-\gamma_5$
f	δ	0	0	0	$-\delta_4$	$-\delta_5$

В соответствии с ранее описанной методикой необходимо прежде всего выяснить, имеется ли в первоначальном выражении для f

$$f = \delta_4 x_4 + \delta_5 x_5 + \delta$$

хотя бы один отрицательный коэффициент при x_4 и x_5. Поскольку при внесении в таблицу коэффициенты при x_4 и x_5 поменяли знаки, мы должны, следовательно, выяснить, имеются ли в последней строке таблицы (не считая свободного члена δ) положительные числа. Если таковых нет, то базисное решение, отвечающее данному базису, т.е. $(\alpha, \beta, \gamma, 0, 0)$, является оптимальным, а $\min f = \delta$ и задача решена.

Предположим, что в последней строке имеется, не считая δ, положительное число δ_4. Отмечаем столбец, в котором оно находится, вертикальной стрелкой. Далее просматриваем остальные числа этого столбца. Если среди них нет отрицательных (это означает, что $\alpha_4 \geq 0,\ \beta_4 \geq 0,\ \gamma_4 \geq 0$), то имеем случай II. Тогда $\min f = -\infty$, и процесс снова прекращается.

Пусть, наконец, среди чисел отмеченного столбца, кроме последнего числа, есть положительные. Это означает, что мы имеем случай III и, следовательно, должны сделать *шаг*. Например, как мы считали ранее, пусть $-\alpha_4 > 0,\ -\beta_4 > 0$ (это означает, что $\alpha_4 < 0,\ \beta_4 < 0$), а $-\gamma_4 \leq 0$ (т.е. $\gamma_4 \geq 0$), в точном соответствии с предположением (8.7). В этом случае описанная ранее методика предписывает составить отношения

$$\frac{\alpha}{-\alpha_4} \text{ и } \frac{\beta}{-\beta_4}$$

и выбрать из них меньшее.

Пусть, например, таковым является отношение $\dfrac{\alpha}{-\alpha_4}$, отвечающее строке таблицы с базисным неизвестным x_1. Отмечаем эту строку горизонтальной стрелкой. Элемент таблицы, стоящий в отмеченном столбце и отмеченной строке, называется *разрешающим* элементом. В данном случае это $-\alpha_4$ (в табл. 8.1 он обведен пунктиром).

С этого момента начинается перестройка таблицы, имеющая целью переход к новому базису $\{x_4,\, x_2,\, x_3\}$. Ее можно осуществить при помощи все того же метода Гаусса. А именно умножаем выделенную строку на такое число, чтобы на месте разрешающего элемента появилась единица (т.е. умножаем на $\dfrac{1}{-\alpha_4}$) – это соответствует тому, что первое из уравнений (8.20) разрешается относительно нового базисного неизвестного x_4. Полученную таким образом новую строку вписываем уже в новую таблицу – снова в виде первой строки. Затем к каждой из остальных строк табл. 8.1 прибавляем вновь полученную строку, умноженную на такое число, чтобы в клетке отмеченного столбца появился нуль – это соответствует исключению неизвестного x_4 из остальных уравнений, а также из выражения для f. Преобразованные таким образом строки пишем в новую таблицу (табл. 8.2) на место прежних строк.

К новой таблице применяется та же процедура. В результате или находится оптимальное решение (случай I), или обнаруживается, что $\min f = -\infty$ (случай II), т.е. целевая функция неограничена, или же производится следующий шаг (случай III) – получим новую таблицу (табл. 8.3) и т.д., пока процесс не остановится (случай I или II).

Вот как будет выглядеть при такой методике решение примера 8.1. Исходная таблица имеет вид (табл. 8.2).

Таблица 8.2

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	1	–2
x_2	2	0	1	0	–2	1
x_3	3	0	0	1	3	1
f	0	0	0	0	–1	1

Заполнение табл. 8.3 начинается со строки x_5 (содержимое таблицы соответствует (8.15) и (8.16)).

Таблица 8.3

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	5	1	2	0	–3	0
x_5	2	0	1	0	–2	1
x_3	1	0	–1	1	5	0
f	–2	0	–1	0	1	0

Следующая табл. 8.4 соответствует (8.17) и (8.18).

Таблица 8.4

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\frac{28}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
x_5	$\frac{12}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1
x_4	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0
f	$-\frac{11}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0

В табл. 8.4 последняя строка (не считая свободного члена) не имеет положительных чисел. Значит, достигнуто оптимальное решение

$$x_1 = \frac{28}{5},\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{1}{5},\ x_5 = \frac{12}{5},$$

а минимум f равен $-\frac{11}{5}$.

Итак, подведем итог в виде следующего алгоритма.

Алгоритм работы по симплекс-методу

1. Выделяем исходный допустимый базис и заполняем первую таблицу.

2. Если в последней строке полученной таблицы, кроме, быть может, первого числа, нет положительных чисел, то базисное решение является оптимальным – задача решена.

3. Пусть среди указанных в пункте 2 чисел имеется положительное, допустим, в столбце x_j. Отмечаем столбец x_j вертикальной стрелкой. Просматриваем остальные числа этого столбца. Если среди них нет положительных, то $\min f = -\infty$ – задача решения не имеет.

4. Пусть среди просмотренных в пункте 3 чисел имеются положительные. Для каждого из таких чисел a составляем отношение $\frac{b}{a}$, где b – первое число в той же строке (свободный член). Из всех таких отношений выбираем наименьшее. Пусть оно соответствует строке для базисного неизвестного x_i. Отмечаем эту строку горизонтальной стрелкой. Число α, стоящее в отмеченной строке и отмеченном столбце, называется *разрешающим элементом* таблицы.

5. Переходим к новой таблице. Для этого отмеченную строку делим на α (чтобы на месте разрешающего элемента появилась единица) и пишем ее на месте прежней. К каждой из остальных строк таблицы прибавляем ту, что получена на месте отмеченной строки, умноженную на такое число, чтобы элемент, стоящий в отмеченном столбце, обратился в 0. Полученную строку пишем на месте прежней.

6. С новой таблицей возвращаемся к выполнению пункта 2.

§ 8.3. Работа с целевой функцией

При подготовке задачи линейного программирования к решению с помощью симплекс-метода приходится решать технический вопрос: как наиболее рационально найти выражение целевой функции f через свободные неизвестные?

Пусть задача имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \alpha, \\ x_2 = \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta, \\ x_3 = \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5 + \gamma, \end{cases} \tag{8.21}$$

$$x_i \geq 0 \;\; (i = 1, \ldots, 5),$$

$$f = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + c_5 x_5 \to \min. \tag{8.22}$$

Чтобы получить требуемое выражение для f, следует в равенстве (8.22) заменить x_1, x_2, x_3 по формулам (8.21). Осуществляя такую замену, находим

$$f = c_0 + c_1(\alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \alpha) + c_2(\beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta) +$$
$$+ c_3(\gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5 + \gamma) + c_4 x_4 + c_5 x_5.$$

После приведения подобных членов получим

$$f = \delta_4 x_4 + \delta_5 x_5 + \delta,$$

где, очевидно,

$$\delta = c_0 + c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma,$$

$$\delta_4 = c_1\alpha_4 + c_2\beta_4 + c_3\gamma_4 + c_4,$$

$$\delta_5 = c_1\alpha_5 + c_2\beta_5 + c_3\gamma_5 + c_5.$$

Обозначим:

$\vec{c}_Б = (c_1, c_2, c_3)$ – вектор из “базисных” коэффициентов в равенстве (8.22),

$\vec{h} = (\alpha, \beta, \gamma)$ – вектор свободных членов в (8.21),

$\vec{h}_4 = (\alpha_4, \beta_4, \gamma_4)$ – вектор из коэффициентов при x_4 в (8.21),

$\vec{h}_5 = (\alpha_5, \beta_5, \gamma_5)$ – вектор из коэффициентов при x_5 в (8.21).

Тогда предыдущие равенства перепишутся в виде

$$\delta = c_0 + \left(\vec{c}_Б, \vec{h}\right),$$
$$\delta_4 = \left(\vec{c}_Б, \vec{h}_4\right) + c_4,$$
$$\delta_5 = \left(\vec{c}_Б, \vec{h}_5\right) + c_5.$$

Чтобы научиться правильно использовать эти формулы, запишем их так:

$$\delta = c_0 + \left(\vec{c}_Б, \vec{h}\right),$$
$$-\delta_4 = \left(\vec{c}_Б, -\vec{h}_4\right) + c_4,$$
$$-\delta_5 = \left(\vec{c}_Б, -\vec{h}_5\right) + c_5$$

и далее учтем, что $\vec{h}$ – это столбец свободных членов из симплекс-таблицы, отвечающей (8.21), $-\vec{h}_4$ – это столбец для переменной x_4 из той же симплекс-таблицы, а $-\vec{h}_5$ – аналогичный столбец для x_5. Обозначим эти столбцы $\underset{таб}{\vec{h}}$, $\underset{таб}{\vec{h}_4}$ и $\underset{таб}{\vec{h}_5}$. Тогда получим:

$$\begin{cases} \underset{таб}{\delta} = \left(\vec{c}_Б, \underset{таб}{\vec{h}}\right) + c_0, \\ \underset{таб}{\delta_4} = \left(\vec{c}_Б, \underset{таб}{\vec{h}_4}\right) - c_4, \\ \underset{таб}{\delta_5} = \left(\vec{c}_Б, \underset{таб}{\vec{h}_5}\right) - c_5. \end{cases} \tag{8.23}$$

Это и есть искомые формулы.

Обычно поступают так: над неизвестными x_1, ..., x_5 в заглавной строке симплекс-таблицы пишут числа c_1, ..., c_5 (коэффициенты из равенства (8.22)), а слева от базисных неизвестных пишут c_1, c_2, c_3 (“базисные” коэффициенты из (8.22)). Далее пользуются формулами (8.23) для заполнения последней строки таблицы (строки для f) (табл. 8.5).

Таблица 8.5

		c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
	Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c_1	x_1						
c_2	x_2						
c_3	x_3						
		$\underset{таб}{\vec{h}}$				$\underset{таб}{\vec{h}_4}$	$\underset{таб}{\vec{h}_5}$

Разумеется, при переходе от первой симплекс-таблицы ко второй строка для f получается сама собой (при помощи симплекс-алгоритма, описанного в конце § 8.2 – см. пункт 5 алгоритма). Но в принципе ее можно получить также и с помощью формул (8.23). Такой “двойной” способ нахождения последней строки можно использовать в качестве контроля вычислений.

Пример 8.3. Решить задачу линейного программирования

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + \boxed{x_3} + 2x_4 = 1, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 + \boxed{x_6} = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + x_5 + \boxed{x_7} = 5, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ \ (i = 1, ..., 7),$$

$$f = 9 + 3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + 2x_5 - x_7 \to \min.$$

Решение. Здесь исходный базис образован неизвестными x_3, x_6, x_7 (для большей наглядности они обведены пунктиром). В табл. 8.6 приведена первая симплекс-таблица без строки для f.

Для заполнения последней строки таблицы можно воспользоваться формулами типа (8.23) (точка означает скалярное умножение):

$$\underset{таб}{\delta_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 = -2,$$

$$\underset{таб}{\delta_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 5 = -8,$$

$$\underset{таб}{\delta_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 3 = 5,$$

$$\underset{таб}{\delta_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = -3,$$

$$\underset{таб}{\delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 9 = 4.$$

Таблица 8.6

		9	3	5	0	–3	2	0	–1
	Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_3	1	3	–5	1	2	0	0	0
0	x_6	4	–2	2	0	–1	1	1	0
–1	x_7	5	–1	3	0	–2	1	0	1
	f								

Следовательно, последняя строка табл. 8.6 выглядит следующим образом:

f	4	–2	–8	0	5	–3	0	0

Дальнейшая работа с таблицей осуществляется в соответствии с симплекс-алгоритмом, при этом для контроля правильности вычислений можно использовать формулы типа (8.23). Рекомендуем читателю довести решение примера до конца, сопровождая каждый шаг контролем строки f.

§ 8.4. Метод искусственного базиса. Двухфазный симплекс-метод

Выше была описана схема решения задачи линейного программирования симплекс-методом. В качестве предварительного условия мы требовали, чтобы в системе ограничений был выделен исходный допустимый базис. Во многих задачах такой базис усматривается непосредственно. В других случаях его приходится искать. Ниже будет рассмотрен один из методов нахождения допустимого базиса, который обычно называют *методом искусственного базиса.*

Пусть нужно решить задачу линейного программирования с системой ограничений, имеющей, для определенности, размер 3×5 (три уравнения с пятью неизвестными). Итак, рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 = b, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 = c, \end{cases} \tag{8.24}$$

$$x_i \geq 0 \ \ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5), \tag{8.25}$$

$$f = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 + d_5x_5 + d \to \min. \tag{8.26}$$

Свободные члены a, b, c уравнений будем считать неотрицательными: если это условие не выполняется, например, если $a < 0$, то, умножив обе части первого уравнения на -1, получим уравнение, в котором свободный член больше 0. Итак, пусть

$$a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0. \tag{8.27}$$

Наряду с задачей (8.24) … (8.26), которую будем считать исходной, рассмотрим другую задачу линейного программирования: при ограничениях

$$\begin{cases} \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + y_1 = a, \\ \quad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + y_2 = b, \\ \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + y_3 = c, \\ f - d_1x_1 - d_2x_2 - d_3x_3 - d_4x_4 - d_5x_5 = d \end{cases} \tag{8.28}$$

и условиях

$$x_i \geq 0 \ \ (i = 1, \ldots, 5), y_j \geq 0 \ \ (j = 1, 2, 3) \tag{8.29}$$

минимизировать функцию

$$F = y_1 + y_2 + y_3. \tag{8.30}$$

Сформулированная задача является вспомогательной для основной задачи (8.24) … (8.26) и служит для нахождения допустимого базиса. Неизвестными в ней являются x_1, ..., x_5; y_1, y_2, y_3. При этом неизвестные y_1, y_2, y_3 называются *искусственными*, они образуют *искусственный базис*. Разумеется, если в системе уравнений (8.24) имеются одна или две базисные переменные, то число искусственных переменных можно уменьшить. В систему ограничений (8.28) включили выражение для целевой функции (8.26) в качестве дополнительного уравнения. Это не принципиально, но удобно, поскольку при симплексных преобразованиях сразу получается выражение для целевой функции исходной задачи.

Заметим, что из выражения для F и неотрицательности искусственных переменных следует, что $\min F = 0$ тогда и только тогда, когда все искусственные переменные равны нулю.

Для решения задачи (8.28) – (8.30) можно воспользоваться симплекс-методом, поскольку указан допустимый базис. Таким базисом ввиду (8.28) является $\{y_1, y_2, y_3\}$.

При решении задачи могут представиться две возможности:

1) $\min F > 0$;

2) $\min F = 0$.

В первом случае в оптимальном решении хотя бы одна из искусственных переменных, например y_1, положительна. Это означает, что первое уравнение системы (8.28) при удалении y_1 превращается в строгое неравенство. Таким образом, в этом случае система (8.28) не имеет допустимых решений, т.е. множество допустимых решений пусто и исходная задача не имеет решений.

Во втором случае в оптимальном решении каждая из искусственных переменных обращается в нуль. Может случиться так, что некоторые из искусственных неизвестных остались в базисе. Нетрудно показать, что с помощью симплексных преобразований можно последовательно вывести их из базиса, так что полученный базис можно использовать для продолжения решения задачи с целевой функцией f.

Нахождение min F называют *первой фазой* решения задачи (8.24) – (8.26), а возможное его продолжение с целевой функцией f – *второй фазой*, при этом сам метод – *двухфазным симплекс-методом*.

Прежде чем обратиться к примерам, сделаем одно замечание. Решая задачу (8.28) – (8.30), мы стремимся (если это возможно) получить оптимальное решение, в котором значения искусственных неизвестных равны нулю. Наилучший способ достичь этого – выбрать последовательность шагов таким образом, чтобы все искусственные неизвестные вышли из базиса, т.е. стали свободными. Тогда в базисном решении значения этих неизвестных и будут как раз нулями. Таким образом, переходя при решении задачи (8.28) – (8.30) от одного базиса к другому, мы стараемся в первую очередь выводить из базиса одно искусственное неизвестное за другим. Возможны, впрочем, и такие (досадные) случаи, когда в процессе решения приходится заменять одно искусственное неизвестное на другое (выбор разрешающего элемента по-другому не получается). Но общим направлением вычислительного процесса во всех случаях остается постепенный вывод искусственных неизвестных из базиса.

Пример 8.4. Решить задачу линейного программирования

$$f = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min$$

при условии $(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ и ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 \qquad\quad - 2x_3 \leq 5, \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad \geq 3. \end{cases}$$

Решение. Приведем сначала задачу к канонической форме, введя две балансовые переменные $x_4 \geq 0$ и $x_5 \geq 0$. Получим задачу:

$$f = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min \tag{8.31}$$

при условии $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0$ и ограничениях

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\
x_1 - 2x_3 + x_4 = 5, \\
2x_1 + 2x_2 - x_5 = 3.
\end{cases} \tag{8.32}
$$

Эта задача эквивалентна первоначальной, но отсутствует исходный допустимый базис. Впрочем, во втором уравнении имеется базисная переменная x_4, которую можно ввести в искомый базис. Для первого и третьего уравнений приходится ввести искусственные переменные x_6 и x_7. Получим вспомогательную задачу:

$$F = x_6 + x_7 \to \min$$

при условии $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \geq 0$ и ограничениях

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4, \\
x_1 - 2x_3 + x_4 = 5, \\
2x_1 + 2x_2 - x_5 + x_7 = 3,
\end{cases}
$$

где x_1, x_2, x_3 – исходные переменные, x_4, x_5 – балансовые переменные, x_6, x_7 – искусственные переменные.

Заполняем симплекс-таблицу (табл. 8.7). При нахождении коэффициентов последней строки для целевой функции F достаточно сложить уравнения (8.32), соответствующие искусственным переменным x_6 и x_7, т.е. первое и третье уравнения. В последней строке имеются сразу три положительных числа 4, 3 и 1. Выбираем первое из них. Разрешающий элемент находится в столбце x_1 и строке x_7. Производим шаг, в результате которого искусственное неизвестное x_7 выходит из базиса, уступая в нем место неизвестному x_1. При этом мы можем вычеркнуть столбец x_7 из получающейся табл. 8.8, поскольку искусственная переменная x_7 стала свободной и для дальнейшего стала излишней.

В табл. 8.8 выбираем столбец с x_3, поскольку стоящее в нем число 1 положительно. Разрешающий элемент находится в столбце x_3 и строке x_6. Производим шаг, в результате которого x_6 выходит из базиса, уступая в нем место x_3.

Таблица 8.7

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	4	2	1	1	0	0	1	0
x_4	5	1	0	–2	1	0	0	0
x_7	3	$\boxed{2}$	2	0	0	–1	0	1
f	0	2	–1	1	0	0	0	0
F	7	4	3	1	0	–1	0	0

Таблица 8.8

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	1	0	–1	$\boxed{1}$	0	1	1	–1
x_4	7/2	0	–1	–2	1	1/2	0	–1/2
x_1	3/2	1	1	0	0	–1/2	0	1/2
f	–3	0	–3	1	0	1	0	–1
F	1	0	–1	1	0	1	0	–2

Таблица 8.9

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	1	0	–1	1	0	1	1
x_4	11/2	0	–3	0	1	5/2	2
x_1	3/2	1	1	0	0	–1/2	0
f	–4	0	–2	0	0	–1	0
F	0	0	0	0	0	0	–1

Получим табл. 8.9, в которой можно вычеркнуть и столбец x_6. Строка целевой функции F состоит из одних нулей и ее можно вычеркнуть. Таким образом, закончилась первая фаза. Поскольку в строке для целевой функции f уже нет положительных чисел, то второй фазы в данном случае не будет, так как мы уже достигли оптимального решения. При этом искусственные неизвестные в базис не входят. Таблицу 8.9 – без столбцов x_6 и x_7 – можно рассматривать как симплекс-таблицу для задачи (8.31), (8.32), причем в ней содержится оптимальное решение этой задачи:

$$\min f = 4, \ \vec{x}_{опт} = \left(\frac{3}{2};\ 0;\ 1;\ \frac{11}{2};\ 0\right).$$

Поскольку нас интересуют непосредственно лишь значения неизвестных x_1, x_2, x_3, ответ запишется в виде

$$\min f = 4, \ \vec{x}_{опт} = \left(\frac{3}{2};\ 0;\ 1\right).$$

Пример 8.5. Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ \ (i = 1, \ldots, 4),$$

$$f = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max.$$

Решение. Для удобства будем решать задачу на нахождение минимума, рассматривая вместо f функцию $-f$:

$$-f = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \min.$$

Укажем без пояснения последовательность симплекс-таблиц 8.10 и 8.11 для соответствующей задачи. Разрешающие элементы выделяются пунктиром.

Таблица 8.10

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
y_1	5	–1	–6	1	–1	1	0
y_2	1	3	–2	$\boxed{1}$	–1	0	1
$-f$	0	–1	1	1	–1	0	0
F	6	2	–8	2	–2	0	0

Таблица 8.11

y_1	4	–4	–4	0	0	1	–1
x_3	1	3	–2	1	–1	0	1
$-f$	–1	–4	3	0	0	0	–1
F	4	–4	–4	0	0	0	–2

Среди чисел последней строки табл. 8.11 нет положительных, кроме свободного члена. Значит, достигнуто оптимальное решение задачи:

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1,\ \ x_4 = 0,\ \ y_1 = 4,\ \ y_2 = 0,\ \min F = 4.$$

Поскольку минимум вспомогательной функции положителен, исходная задача не имеет ни одного допустимого решения.

Рассмотрим далее пример, когда вспомогательная целевая функция обращается в нуль раньше, чем все искусственные переменные вышли из базиса.

Пример 8.6. Найти исходный базис для системы ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 4, \\ 2x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Решение. После введения искусственных переменных x_6, x_7, x_8 и вспомогательной функции $F = x_6 + x_7 + x_8$ заполним исходную симплекс-таблицу (табл. 8.12).

Таблица 8.12

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_6	2	$\boxed{1}$	1	2	0	3	1	0	0
x_7	4	2	1	3	0	4	0	1	0
x_8	4	2	0	4	–3	6	0	0	1
F	10	5	2	9	–3	13	0	0	0

Выбирая разрешающий элемент в строке x_6 и столбце x_1, выполним шаг исключения. Получим табл. 8.13.

Таблица 8.13

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	2	1	1	2	0	3	1	0	0
x_7	0	0	–1	–1	0	–2	–2	1	0
x_8	0	0	–2	0	–3	0	–2	0	1
F	0	0	–3	–1	–3	–2	–5	0	0

Поскольку искусственная переменная x_6 вышла из базиса, вычеркиваем из таблицы ее столбец. Заметим, что целевая функция приняла нулевое значение вместе с искусственными переменными x_7, x_8, поэтому можно вычеркнуть ее строку. Тем не менее в базис входят искусственные переменные x_7, x_8. Поскольку они приняли нулевые значения, разрешающий элемент следует выбирать из строк x_7, x_8. Однако в этих строках нет положительного элемента (если бы он был, мы взяли бы его за разрешающий и исключили бы одну из искусственных переменных).

Запишем уравнение, соответствующее строке x_7:

$$-x_2 - x_3 - 2x_5 = 0.$$

Поскольку все неизвестные принимают только неотрицательные значения, данное уравнение имеет единственное решение:

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0.$$

Получается, что данная система ограничений эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, мы привели исходную систему к допустимому базису.

В разобранных случаях фактически отсутствовала вторая фаза симплекс-метода. Рассмотрим пример, когда она имеется.

Пример 8.7. Решить задачу линейного программирования

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 500, \\ x_2 \le 200, \\ x_1 + 2x_2 \ge 400, \\ x_1 \ge 100, \end{cases} \tag{8.33}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max. \tag{8.34}$$

Решение. После введения балансовых переменных система ограничений (8.33) принимает вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 500, \\ x_2 + x_4 = 200, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 400, \\ x_1 - x_6 = 100, \end{cases} \tag{8.35}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0.$$

Действуя обычным образом, мы должны были бы ввести две искусственные переменные x_7, x_8 и рассмотреть вспомогательную функцию $F = x_7 + x_8$, минимизируя которую, нашли бы допустимый базис. Однако имеется прием, позволяющий сократить число искусственных переменных в общем случае до $s + t$, где s – число ограничений исходной задачи типа уравнений, а $t = 1$, если в системе ограничений имеются неравенства вида «больше или равно», и $t = 0$, если таковых нет.

А именно среди правых частей неравенств вида «больше или равно» находим неравенство с наибольшей правой частью (в рассматриваемом примере это третье неравенство с правой частью 400). Все остальные неравенства такого типа преобразуются по правилу: в системе уравнений (8.35) из выделенного уравнения следует вычесть почленно данное и записать вместо последнего. Тогда система (8.35) примет вид

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 500, \\ x_2 + x_4 = 200, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 400, \\ 2x_2 - x_5 + x_6 = 300. \end{cases} \tag{8.36}$$

Поэтому достаточно ввести только одну искусственную переменную в третье уравнение, чтобы привести систему ограничений (8.36) к допустимому базису. Окончательно задача (8.33), (8.34) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 500, \\ x_2 + x_4 = 200, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + x_7 = 400, \\ 2x_2 - x_5 + x_6 = 300, \end{cases} \tag{8.37}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,\ x_7 \ge 0,$$

$$-f + 2x_1 + 3x_2 = 0,$$

$$F + x_1 + 2x_2 \;\; x_5 = 400. \tag{8.38}$$

Поэтому первой фазой решения данной задачи будет решение (8.37)– (8.38). Начальной симплекс-таблицей будет табл. 8.14.

Таблица 8.14

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	500	2	3	0	0	0	0	0
x_4	200	0	1	0	1	0	0	0
x_7	400	1	2	0	0	–1	0	1
x_6	300	0	$\boxed{2}$	0	0	–1	1	0
$-f$	0	2	3	0	0	0	0	0
F	400	1	2	0	0	–1	0	0

В качестве разрешающего элемента удобно взять число 2 в строке x_6 и столбце x_2. Получим табл. 8.15.

Таблица 8.15

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	350	2	0	1	0	½	–½	0
x_4	50	0	0	0	1	½	–½	0
x_7	100	$\boxed{1}$	0	0	0	0	–1	1
x_2	150	0	1	0	0	–½	½	0
$-f$	–450	2	0	0	0	3/2	–3/2	0
F	100	1	0	0	0	0	–1	0

На втором шаге из базиса исключается искусственная переменная x_7, и вспомогательная целевая функция обращается в нуль. Поэтому можно вычеркнуть строку F и столбец x_7 (табл. 8.16). Это означает завершение первой фазы.

Таблица 8.16

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	~~x_7~~
x_3	150	0	0	1	0	½	3/2	~~–2~~
x_4	50	0	0	0	1	$\boxed{½}$	3/2	~~0~~
x_1	100	1	0	0	0	0	–1	~~1~~
x_2	150	0	1	0	0	–½	½	~~0~~
$-f$	–650	0	0	0	0	3/2	½	~~–2~~
~~F~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~–1~~

На второй фазе выбираем разрешающие элементы, используя строку целевой функции $-f$ (табл. 8.17).

Таблица 8.18 является заключительной, поскольку в строке коэффициентов целевой функции $-f$ нет положительных. Окончательно получим

$$\min f = f(150,\ 200) = 900.$$

Таблица 8.17

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	100	0	0	1	–1	0	$\boxed{2}$
x_5	100	0	0	0	2	1	–1
x_1	100	1	0	0	0	0	–1
x_2	200	0	1	0	1	0	0
$-f$	–800	0	0	0	–3	0	2

Таблица 8.18

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
X_6	50	0	0	½	–½	0	1
x_5	150	0	0	½	3/2	1	0
x_1	150	1	0	½	–½	0	0
x_2	200	0	1	0	1	0	0
$-f$	–900	0	0	–1	–2	0	0

§ 8.5. Теорема о конечности симплекс-алгоритма

Во всех рассмотренных нами примерах на симплекс-метод дело обстояло благополучно в том смысле, что процесс после конечного числа шагов заканчивался либо нахождением оптимального решения, либо установлением того факта, что $\min f = -\infty$. Всегда ли будет так? Поскольку процесс останавливается при наступлении одного из случаев I или II из § 8.1, то поставленный вопрос равнозначен следующему: не может ли случиться, что, производя (по симплекс-методу) шаг за шагом вычисления, мы никогда не окажемся перед одним из случаев I или II? По этому поводу можно высказать следующие соображения.

Каждый шаг состоит в замене одного базиса $Б$ другим $Б'$, причем эта замена происходит таким образом, что значение целевой функции f (для базисного решения) не увеличивается.

Предположим теперь, что процесс продолжается без остановки, образуя бесконечную последовательность базисов

$$Б, Б', Б'', ..., \tag{8.39}$$

для которых

$$f_Б \geq f_{Б'} \geq f_{Б''} \geq \ldots \tag{8.40}$$

Ввиду того что число всех возможных базисов конечно, в последовательности (8.39) некоторые базисы должны повторяться. Следовательно, должны встречаться цепочки

$$Б^{(k)}, Б^{(k+1)}, ..., Б^{(k+m)},$$

в которых начальное и конечное звенья совпадают. Такие цепочки называются *циклами*. Ясно, что тогда и

$$f_Б^{(k)} = f_Б^{(k+m)},$$

откуда следует в силу (8.40), что

$$f_Б^{(k)} = f_Б^{(k+1)} = ... = f_Б^{(k+m)}.$$

Таким образом, процесс может продолжаться неограниченно лишь в том случае, когда несколько последовательных шагов приведут к образованию цикла (зацикливанию).

Случаи зацикливания хотя и встречаются, но крайне редко. В литературе по линейному программированию имеется всего несколько примеров такого рода, но и те, как отмечают их авторы, построены не без труда. Как правило, можно несложным путем избежать зацикливания. Для этого следует в случае появления цикла изменить последовательность вычислений. А именно в той симплекс-таблице, с которой начинается данный цикл (или в любой другой таблице этого цикла), нужно выбрать другой разрешающий элемент (разумеется, в тех столбцах, где такой выбор возможен).

Хотя с практической точки зрения проблема зацикливания не представляет особой важности (ибо случаи зацикливания, как отмечалось, очень редки), но с принципиальной стороны здесь возникают важные вопросы. Основной вопрос состоит в следующем: если данная задача линейного программирования разрешима, то можно ли найти хотя бы одно из ее решений с помощью симплекс-метода, отправляясь от данного базиса системы ограничений? Другими словами, если задача разрешима, то можно ли получить ее решение, отправляясь от данного базиса и выбирая последовательность разрешающих элементов подходящим образом? Утвердительный ответ на этот вопрос означал бы, что любую задачу линейного программирования можно, по крайней мере, в принципе решить при помощи симплекс-метода, и притом отправляясь от любого заданного базиса.

Ответ и в самом деле оказывается утвердительным. Он содержится в следующей теореме.

Теорема 8.1. *Если существует оптимальное решение задачи линейного программирования, то существует и базисное оптимальное решение. Последнее всегда может быть получено с помощью симплекс-метода, причем начинать можно с любого исходного базиса.*

Эту теорему часто называют теоремой о *конечности* симплекс-алгоритма. И действительно, в ней утверждается, что если задача линейного программирования разрешима, то, взяв любой исходный базис и выбирая последовательность разрешающихся элементов подходящим образом, мы всегда придем – после конечного числа шагов – к базисному оптимальному решению.

Доказательство теоремы целесообразно начать с объяснения некоторых понятий, относящихся к векторам. Речь будет идти о своеобразном отношении порядка между векторами с одним и тем же числом координат.

Условимся считать вектор

$$A=(a_1,\, a_2,\, \dots,\, a_r)$$

положительным и записывать это

$$A > 0,$$

если $A \neq 0$ и первая из отличных от нуля координат вектора A положительна. Если даны два вектора

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_r) \text{ и } B = (b_1, b_2, \ldots, b_r),$$

то мы скажем, что вектор A *больше*, чем вектор B (или что вектор B *меньше,* чем вектор A), если разность $A - B$ есть положительный вектор. Другими словами, условие $A > B$ означает, что

$$a_1 > b_1,$$

или же

$$a_1 = b_1, \text{ но } a_2 > b_2,$$

или же

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \text{ но } a_3 > b_3 \text{ и т. д.}$$

Очевидно, для любых двух векторов A и B выполняется одно и только одно из соотношений

$$A > B,\ A < B,\ A = B.$$

Далее, если $A > B$ и $B > C$, то $A > C$.

Обратимся теперь непосредственно к доказательству теоремы.

Пусть дана задача линейного программирования, причем система ограничений с самого начала разрешена относительно некоторого базиса, скажем $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Итак, даны система

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - (a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n), \\ x_2 = b_2 - (a_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_r = b_r - (a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n) \end{cases} \tag{8.41}$$

и линейная функция

$$f = \delta_0 - (\delta_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \delta_n x_n).$$

Как обычно, требуется среди неотрицательных решений системы найти такое, которое минимизирует функцию f.

Исходным данным нашей задачи соответствует некоторая симплекс-таблица. Составим эту таблицу (табл. 8.19), а затем припишем к ней справа еще r столбцов.

Таблица 8.19

Базисные неизвестные	x_1	...	x_r	x_{r+1}	...	x_n	Свободные члены				
x_1	1		0	$a_{1,r+1}$		a_{1n}	b_1	c_{11}	c_{12}		c_{1r}
...							...				
x_r	0		1	$a_{r,r+1}$		a_{rn}	b_r	c_{r1}	c_{r2}		c_{rr}
f	0		0					c_1	c_2		c_r

(приписанная часть здесь заключена в пунктирную рамку). Числа c_{ij} и c_j ($i, j = 1, 2, ..., r$) могут выбираться как угодно, но с одним условием: *матрица* (c_{ij}) *должна быть невырожденной.*

Условимся называть базис положительным, если все векторы

$$C_i = (b_i, c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{ir}) \quad (i = 1, 2, .., r)$$

положительны в указанном ранее смысле. Разумеется, если все свободные члены b_i положительны, то базис будет положительным независимо от того, какие числа стоят в приписанной части табл. 8.19. Однако если какое-либо из чисел b_i равно нулю, то условие положительности базиса накладывает некоторое ограничение на числа c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{ir}: первое из них, отличное от нуля, должно быть положительным. Таким образом, свойство базиса быть положительным может зависеть не только от самой системы ограничений (8.41), но и от приписанных чисел c_{ij}.

Решение задачи по симплекс-методу сводится к последовательным заменам базиса. При этом над строками симплекс-таблицы производятся определенные действия. Условимся всякий раз, когда совершается какое-либо преобразование над строками симплекс-таблицы, выполнять то же самое преобразование и над приписанной к таблице частью.

Очередной шаг симплекс-метода начинается с выбора разрешающего элемента. Напомним, как производится этот выбор. Находим среди чисел $\delta_{r+1}, ..., \delta_n$ последней строки положительное число δ_j, после чего просматриваем все числа $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{rj}$ столбца x_j. Для каждого положительного a_{kj} составляем отношение $\frac{b_k}{a_{kj}}$ и затем среди этих отношений выбираем наименьшее, допустим $\frac{b_i}{a_{ij}}$. Тогда элемент a_{ij} и будет разрешающим. Если минимум отношения $\frac{b_k}{a_{kj}}$ достигается сразу при нескольких значениях k, то в качестве i мы берем любое из этих значений. Возможность подобного выбора вносит в расчеты некоторый элемент произвола. Теперь мы устраним этот произвол и условимся выбирать разрешающий элемент в соответствии со следующим правилом: сравниваются векторы $\frac{1}{a_{kj}}C_k$ для всех положительных a_{kj} и берется наименьший из них – в смысле того отношения порядка, о котором говорилось выше. Допустим, что наименьшим является $\frac{1}{a_{ij}}C_i$. Тогда в качестве разрешающего элемента берется a_{ij}. Нетрудно понять, что этим правилом выбор разрешающего элемента определен однозначно. Действительно, среди векторов $\frac{1}{a_{1j}}C_1, ..., \frac{1}{a_{rj}}C_r$ не может быть равных, в противном случае две строки матрицы (c_{ij}) оказались бы пропорциональными, что противоречит невырожденности этой матрицы.

Введем в рассмотрение еще один вектор $C = (\delta_0, c_1, ..., c_r)$.

После очередного шага симплекс-метода числа, стоящие в приписанной части таблицы, конечно, изменяются; в частности, вектор C заменяется другим вектором C'. Докажем, что если исходный базис был положительным, то выполняются следующие утверждения:

1) новый базис снова будет положительным;

2) новый вектор C' меньше, чем старый вектор C:

$$C' < C.$$

Из этих утверждений будет сразу же следовать справедливость доказываемой нами теоремы. В самом деле, если вектор C с каждым шагом уменьшается, то это означает, в частности, что мы не можем (после скольких угодно шагов) вернуться к исходному базису. Тем самым зацикливание исключено, и процесс после конечного числа шагов должен закончиться отысканием оптимального решения.

Вспомним, как происходит преобразование симплекс-таблицы. Выбрав разрешающий элемент a_{ij}, мы умножаем i-ю строку таблицы на $\frac{1}{a_{ij}}$. Таким образом,

$$C'_i = \frac{1}{a_{ij}} C_i,$$

и так как $a_{ij} > 0,\ C_i > 0,$ то $C'_i > 0.$ Из любой другой строки вычитается подходящее кратное i-й строки, подобранное с таким расчетом, чтобы элемент, стоящий в j-м столбце, обратился в нуль. Таким образом,

$$C'_k = C_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} C_i \ (k = 1, ..., r;\ k \neq i)\,.$$

Если при этом $a_{kj} < 0,$ то $-\frac{a_{kj}}{a_{ij}} C_i > 0$ и $C'_k > 0.$ Если же $a_{kj} > 0$, то

$$C'_k = a_{kj}\left(\frac{1}{a_{kj}} C_k - \frac{1}{a_{ij}} C_i\right).$$

Но в силу условия на выбор разрешающего элемента вектор, записанный в скобках, положителен: следовательно, $C'_k > 0.$ Это показывает, что новый базис является положительным. Наконец, заметим, что

$$C' = C - \frac{\delta_j}{a_{ij}} C_i,$$

и так как в данном случае $\delta_j > 0,$ то мы получим $C' < C$, что и требовалось доказать.

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам остается ответить только на один вопрос: как обеспечить положительность исходного базиса. Но это совсем просто: достаточно приписать к исходной симплекс-таблице справа следующие числа:

1	0	…	0
0	1	…	0
…	…	…	…
0	0	…	1
0	0	…	0

Здесь матрица (c_{ij}) – единичная, а все числа последней строки равны нулю. Теорема доказана.

В заключение необходимо подчеркнуть еще раз то обстоятельство, что симплекс-метод всегда приводит к *базисному* решению.

Если не помнить это обстоятельство, то можно зачастую прийти к курьезам. Один из таких случаев описан в литературе по линейному программированию и связан с рассмотренной нами ранее задачей о диете. Рассчитываемая диета должна была включать 77 видов пищи. Формулировка задачи в терминах линейного программирования включала 9 уравнений с 86 неизвестными, из которых 9 были дополнительными. Оптимальное решение, конечно, удовлетворяло всем требованиям задачи. Однако, поскольку симплекс-метод дает только *базисное* решение, оптимальная диета включала лишь 9 различных видов пищи (пшеничную муку, кукурузу, сгущенное молоко, растительное масло, сало, говяжью печень, капусту, картофель и шпинат). Ясно, что подобная диета не вполне отвечала бы требованиям вкуса и разнообразия пищи. Правильная постановка задачи должна, разумеется, учитывать и такие требования.

ГЛАВА 9

ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

§ 9.1. Взаимно двойственные задачи линейного программирования

С каждой задачей линейного программирования связана другая задача, называемая *двойственной* по отношению к исходной. Совместное изучение данной задачи и двойственной к ней дает, как правило, значительно больше, чем изучение каждой из них в отдельности.

1. Постановка взаимно двойственных задач

Рассмотрим пример, показывающий, как в реальной экономической ситуации могут возникать взаимно двойственные задачи линейного программирования.

На некотором предприятии после выполнения годового плана возник вопрос: как поступить с остатками сырья? Часть заводских экономистов высказалась за то, чтобы наладить из оставшегося сырья производство изделий ширпотреба; другие же предложили продать сырье «на сторону» какой-нибудь нуждающейся в нем организации. Исследование этих двух возможностей поручили математикам. Вывод, к которому пришли математики, оказался неожиданным. Но прежде чем изложить их соображения, перечислим исходные данные задачи.

Для простоты будем считать, что имеются два вида сырья S_1 и S_2, остатки которого составляют соответственно 35 и 20 единиц. Из этого сырья можно наладить производство трех видов товаров: T_1, T_2, T_3. От реализации единицы каждого вида товара завод получит прибыль: от T_1 – 7 руб., T_2 – 6 руб. T_3 – 18 руб. Нормы расхода сырья на производство товаров T_1, T_2, T_3 вместе с данными о прибыли и запасах представлены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Виды товаров	S_1	S_2	Прибыль
T_1	1	2	7
T_2	1	1	6
T_3	5	2	18
Запасы	35	20	–

Например, число 5 в этой таблице означает, что на производство одной единицы товара T_3 расходуется 5 единиц сырья S_1.

Проследим теперь за ходом мысли математиков. Как уже говорилось, им предстояло проанализировать две возможности.

При исследовании первой возможности (наладить выпуск товаров T_1, T_2, T_3) возникает вопрос о *плане выпуска* товаров. План выпуска задается тремя числами x_1, x_2, x_3, где x_i – количество единиц товара T_i, которое следует произвести (i = 1, 2, 3). Неизвестные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \end{cases} \tag{9.1}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 35, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20. \end{cases} \tag{9.2}$$

Поясним смысл первого неравенства системы (9.2). В левой части записано количество сырья S_1, которое расходуется на выпуск x_1 единиц T_1, x_2 единиц T_2 и x_3 единиц T_3; это количество не должно превышать имеющегося запаса сырья S_1, т.е. 35. Аналогичный смысл имеет второе неравенство системы (9.2).

Прибыль (руб.), которую получит предприятие от реализации плана (x_1, x_2, x_3) выпуска товаров, будет, очевидно, равна:

$$f = 7x_1 + 6x_2 + 18x_3.$$

В интересах предприятия максимизировать эту прибыль. Следовательно, чтобы наилучшим образом использовать первую возможность, нужно решить задачу линейного программирования: $f \to \max$ при условиях (9.1), (9.2). Назовем эту задачу *задачей* I.

Исследуем теперь вторую возможность (продать сырье другой организации). Здесь возникает вопрос, по каким ценам продать сырье? Обозначим эти цены y_1, y_2 (y_i – цена единицы сырья S_i). Разумеется, выполнены неравенства

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \tag{9.3}$$

Справедливое требование к ценам со стороны продающего предприятия состоит в следующем: если взять сырье, идущее на изготовление единицы товара T_i ($i = 1, 2, 3$), то выручка от его продажи должна быть не меньше, чем прибыль от реализации готового изделия (в противном случае нет смысла продавать сырье – лучше изготовить из него товар и получить за него прибыль). Это требование приводит к неравенствам

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 7, \\ y_1 + y_2 \geq 6, \\ 5y_1 + 2y_2 \geq 18. \end{cases} \tag{9.4}$$

Например, первое из написанных неравенств означает, что выручка от продажи одной единицы сырья S_1 и двух единиц S_2 (именно такое количество сырья расходуется на изготовление единицы T_1) не меньше, чем прибыль, которую могло бы получить предприятие от продажи единицы товара T_1, если бы оно отказалось от идеи продать сырье и занялось изготовлением из него товаров T_1, T_2, T_3. Аналогичный смысл имеют остальные два неравенства.

Других требований к ценам y_1, y_2 предприятие-продавец предъявлять не вправе. Что же касается покупателя, то для него единственное пожелание заключается в сокращении до минимума расходов на покупку сырья, т.е. величины

$$\varphi = 35y_1 + 20y_2.$$

Следовательно, для справедливого использования второй возможности необходимо решить такую задачу линейного программирования:

$$\varphi \to \min \text{ при условиях (9.3), (9.4).}$$

Назовем эту задачу *задачей* II.

Для большей отчетливости сопоставим формулировки задач I и II.

Задача I	Задача II
$\{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$ (9.1)	$\{y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,$ (9.3)
$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 \le 35, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 20, \end{cases}$ (9.2)	$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 7, \\ y_1 + y_2 \ge 6, \\ 5y_1 + 2y_2 \ge 18, \end{cases}$ (9.4)
$f = 7x_1 + 6x_2 + 18x_3.$	$\varphi = 35y_1 + 20y_2.$
Из всех решений системы (9.1),(9.2) выбрать такое, для которого $f = \max$	Из всех решений системы (9.3), (9.4) выбрать такое, для которого $\varphi = \min$

Задачи I и II называются *двойственными* друг другу. Смысл, который вкладывается в это название, состоит в следующем.

1. Если первая задача имеет размеры $m \times n$ (m ограничений с n неизвестными), то вторая – размеры $n \times m$. Так, в задаче I два ограничения с тремя неизвестными, а в задаче II – три ограничения с двумя неизвестными.

2. Матрицы из коэффициентов при неизвестных в левых частях ограничений обеих задач – взаимно транспонированные. Так, в задаче I матрица из коэффициентов при x_1, x_2, x_3 есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

в то время как в задаче II матрица из коэффициентов при y_1, y_2 есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. В правых частях ограничений в каждой задаче стоят коэффициенты при неизвестных в целевой функции другой задачи.

4. В задаче I все ограничения представляют собой неравенства типа $\le$, причем в этой задаче требуется достичь максимума f. Напротив, в задаче II все ограничения суть неравенства типа $\ge$, причем требуется достичь минимума φ.

О том, как решается поставленный выше «производственный» вопрос (какую из двух возможностей для реализации остатков сырья следует выбрать), будет рассказано позднее, в § 9.4. А сейчас запишем двойственные задачи I и II в более общей форме, заменив в них конкретные числа буквенными величинами (табл. 9.2).

Таблица 9.2

Задача I	Задача II
$\{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \qquad (9.5)$ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \end{cases} \qquad (9.6)$ $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3.$ Найти max f при условиях (9.5), (9.6).	$\{y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, \qquad (9.7)$ $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge c_2, \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \ge c_3, \end{cases} \qquad (9.8)$ $\varphi = b_1y_1 + b_2y_2\,.$ Найти min φ при условиях (9.7), (9.8).

Если ввести в рассмотрение матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

из коэффициентов при неизвестных в системе (9.6), а также матрицы-столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

то получим другую (матричную) форму записи задач I и II (табл. 9.3).

Таблица 9.3

Задача I		Задача II	
$X \geq 0$	(9.9)	$Y \geq 0$	(9.11)
$AX \leq B$	(9.10)	$A^T Y \geq C$	(9.12)
$f = C^T X \to \max$ при условиях (9.9), (9.10)		$\varphi = B^T Y \to \min$ при условиях (9.13), (9.14).	

В таком виде может быть задана любая пара взаимно двойственных задач линейного программирования: при этом задача I может иметь произвольные размеры $m \times n$, а задача II – соответственно размеры $n \times m$.

2. Основное неравенство для двойственных задач

Теорема 9.1 (основное неравенство). *Пусть X – какое-нибудь допустимое решение задачи* I (*т.е. любое решение системы* (9.9), (9.10)), *а Y – какое-нибудь допустимое решение задачи* II (*любое решение системы* (9.11), (9.12)). *Тогда справедливо неравенство*

$$f(X) \leq \varphi(Y). \tag{9.13}$$

Применительно к указанным ранее задачам размеров 2×3 и 3×2 написанное неравенство означает

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \leq b_1 y_1 + b_2 y_2 .$$

Доказательство. Имеем $AX \leq B$, откуда следует $(AX)^T \leq B^T$ или $X^T A^T \leq B^T$. Умножив обе части этого неравенства справа на матрицу $Y \geq 0$ [1], получим $\left(X^T A^T\right) Y \leq B^T Y$ или, ввиду ассоциативности умножения матриц,

[1] После умножения обеих частей уравнения на матрицу $Y \geq 0$ знак неравенства сохраняется: действительно, обозначив левую и правую части соответственно через P и Q, будем иметь $P \geq Q \Rightarrow P - Q \geq 0 \Rightarrow (P - Q)Y \geq 0 \Rightarrow PY \geq QY$.

$$X^T\left(A^T Y\right) \leq B^T Y = \varphi(Y). \qquad (9.14)$$

Аналогично имеем $A^T Y \geq C$; умножив обе части слева на матрицу $X^T \geq 0$, будем иметь

$$X^T\left(A^T Y\right) \geq X^T C = f(X). \qquad (9.15)$$

Соединяя два полученных неравенства (9.14) и (9.15), можем записать

$$f(X) \leq X^T A^T Y \leq \varphi(Y), \qquad (9.16)$$

откуда и следует основное неравенство (9.13). Заметим, что полученное нами попутно двойное неравенство (9.16) будет использовано дальше.

Следствие 1 (достаточный признак оптимальности). *Если для каких-то допустимых решений* $\overset{0}{X}$ *и* $\overset{0}{Y}$ *задач* I *и* II *выполняется равенство*

$$f\left(\overset{0}{X}\right) = \varphi\left(\overset{0}{Y}\right), \qquad (9.17)$$

то $\overset{0}{X}$ *есть оптимальное решение задачи* I*, а* $\overset{0}{Y}$ *– оптимальное решение задачи* II.

Действительно, для любого допустимого решения X задачи I имеем согласно неравенству (9.13)

$$f(X) \leq \varphi\left(\overset{0}{Y}\right),$$

а значит,

$$f(X) \leq f\left(\overset{0}{X}\right),$$

что и доказывает оптимальность $\overset{0}{X}$. Аналогично доказывается оптимальность $\overset{0}{Y}$.

Следствие 2. *Если в одной из задач* I *и* II *целевая функция не ограничена с соответствующей стороны* (*т.е.* $\max f = \infty$ *в задаче* I *или* $\min \varphi = -\infty$ *в задаче* II), *то другая задача не имеет допустимых решений.*

Действительно, пусть, например, $\max f = \infty$ в задаче I. Если бы существовало допустимое решение $\overset{0}{Y}$ задачи II, то ввиду (9.13) все числа $f(X)$ (где X – любое допустимое решение задачи I) были бы ограничены сверху одним и тем же числом $\varphi\left(\overset{0}{Y}\right)$, что противоречит условию $\max f = \infty$.

§ 9.2. Дополнительные сведения о системах линейных неравенств

Для доказательства основных теорем теории двойственности необходимо углубить наши познания о системах линейных неравенств и соответствующих им геометрических объектах: выпуклых многогранных областях.

Обратимся к специальному классу выпуклых многогранных областей – так называемым *выпуклым многогранным конусам*.

Определение. Пусть

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s \tag{9.18}$$

– система векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$. Множество всех векторов $\vec{a}$ вида

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_s \vec{a}_s, \tag{9.19}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – какие угодно неотрицательные числа, будем называть *конической оболочкой* системы (9.18) и обозначать $K\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \rangle$.

Теорема 9.2. *Множество* $K\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \rangle$ *является выпуклой многогранной областью в* $\mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Координаты вектора (9.19) равны соответственно

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_s a_{s1}, \\ x_2 &= \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_s a_{s2}, \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ x_n &= \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_s a_{sn}, \end{aligned} \tag{9.20}$$

где $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ – координаты вектора $\vec{a}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Если добавить к равенствам (9.20) условия неотрицательности

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \ldots, \lambda_s \geq 0, \tag{9.21}$$

то полученная система (9.20), (9.21) уравнений и неравенств будет определять в пространстве $\mathbb{R}^{n+s}$ с координатами $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$ некоторое множество M; очевидно, что $K\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \rangle$ есть проекция этого множества на координатную плоскость $\mathbb{R}^n$ (с координатами $x_1, \ldots, x_n$). Но множество M, будучи заданным с помощью системы (9.20), (9.21) линейных уравнений и неравенств, а в конечном счете с помощью линейных неравенств (ведь любое уравнение $b = 0$ можно заменить системой из двух неравенств $b \geq 0$ и $b \leq 0$), является выпуклым многогранным множеством $\mathbb{R}^{n+s}$. По теореме о проекциях находим отсюда, что множество $K\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \rangle$ есть выпуклая многогранная область в $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана.

В дальнейшем будем называть множество $K\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \rangle$ *выпуклым многогранным конусом*.

Заметим, что с помощью аналогичных рассуждений может быть доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. *Выпуклая оболочка* Conv($A_1, \ldots, A_s$) *нескольких точек в n-мерном пространстве является выпуклой многогранной областью.*

Установим теперь одно важное свойство выпуклых многогранных областей, называемое *отделимостью*.

Т е о р е м а 9.3 (об отделимости). *Пусть K – выпуклая многогранная область в $\mathbb{R}^n$ и $\vec{b}$ – вектор, не принадлежащий K. Тогда* *существует гиперплоскость* $(\vec{c}, \vec{x}) = \lambda$, *строго отделяющая вектор* $\vec{c}$ *от множества K, т.е.* $(\vec{c}, \vec{x}) < \lambda$ *для всех* $\vec{x} \in K$ *и* $(\vec{c}, \vec{b}) > \lambda$.

Рис. 9.1 иллюстрирует ситуацию, указанную в теореме (здесь L обозначает гиперплоскость $(\vec{c}, \vec{x}) = \lambda$).

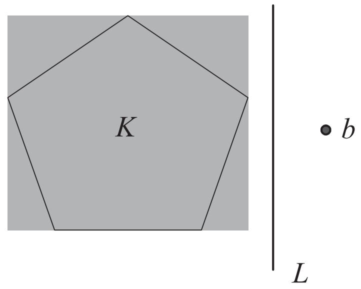

Рис. 9.1

Доказательство. Множество K по условию задано в $\mathbb{R}^n$ некоторой системой линейных неравенств. Так как $\vec{b} \notin K$, то при $\vec{x} = \vec{b}$ хотя бы одно из этих неравенств, скажем $(\vec{p}, \vec{x}) \le \alpha$, не выполняется; следовательно, имеем

$$(\vec{p}, \vec{b}) > \alpha. \tag{9.22}$$

Гиперплоскость $(\vec{p}, \vec{x}) = \alpha$ отделяет вектор $\vec{c}$ от K, хотя и не в строгом смысле, так как для всех $\vec{x} \in K$ мы имеем $(\vec{p}, \vec{x}) \le \alpha$, а для вектора $\vec{b}$ имеем $(\vec{p}, \vec{b}) > \alpha$. Покажем, что, заменив α некоторым числом λ, мы получим гиперплоскость $(\vec{p}, \vec{x}) = \lambda$, *строго* отделяющую вектор $\vec{b}$ от K.

Обозначим число $(\vec{p}, \vec{b})$ через β; из (9.22) следует $\beta > \alpha$. Возьмем какое-либо число γ, такое, что $\beta > \gamma > \alpha$. Для любого $\vec{x} \in K$ имеем $(\vec{p}, \vec{x}) \le \alpha < \gamma$, а так как $\beta > \gamma$, то $(\vec{p}, \vec{b}) > \gamma$. Теорема доказана.

Следует заметить, что теорема об отделимости справедлива и в более общем случае: вместо выпуклой многогранной области K можно взять любую выпуклую *замкнутую* область D в $\mathbb{R}^n$ (смысл термина «замкнутая» будет объяснен в курсе математического анализа (см. вторую часть учебника)).

§ 9.3. Теоремы о следствиях системы неравенств

Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} f_1 \le 0, \\ f_2 \le 0, \\ . \quad . \quad . \\ f_s \le 0, \end{cases} \tag{9.23}$$

где $f_1, \ldots, f_s$ – какие угодно функции от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Определение. *Неравенство*

$$f \le 0 \tag{9.24}$$

называется ***следствием*** *системы* (9.23), *если любой набор значений* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *удовлетворяющий системе* (9.23), *удовлетворяет и неравенству* (9.24).

Определение. *Пусть дана система неравенств* (9.23) *и пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *– какие угодно неотрицательные числа. Неравенство*

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_s f_s \le 0$$

называется ***неотрицательной линейной комбинацией*** *неравенств* (9.23).

Нетрудно видеть, что любое неравенство, являющееся неотрицательной линейной комбинацией неравенств (9.23), является следствием (9.23). Нас интересует вопрос, в какой мере верно обратное, т.е. в каких случаях любое следствие системы (9.23) есть неотрицательная линейная комбинация неравенств (9.23)?

Теорема 9.4 (Фаркаша). *Пусть дана система однородных линейных неравенств*

$$\begin{cases} (\vec{a}_1, \vec{x}) \le 0, \\ (\vec{a}_2, \vec{x}) \le 0, \\ . \quad . \quad . \\ (\vec{a}_s, \vec{x}) \le 0. \end{cases} \tag{9.25}$$

Тогда любое неравенство

$$(\vec{a}, \vec{x}) \leq 0, \tag{9.26}$$

являющееся следствием системы (9.25), *может быть представлено как неотрицательная линейная комбинация неравенств* (9.25).

Доказательство. Рассмотрим выпуклый многогранный конус $K = K\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \rangle$ в $\mathbb{R}^n$. Мы должны показать, что $\vec{a} \in K$.

Допустим противное, т.е. что $\vec{a} \notin K$. По теореме отделимости из § 9.2 существует гиперплоскость

$$(\vec{c}, \vec{x}) = \lambda,$$

строго отделяющая вектор $\vec{a}$ от конуса K, т.е.

$$(\vec{c}, \vec{x}) < \lambda \text{ для всех } \vec{x} \in K \tag{9.27}$$

и

$$(\vec{c}, \vec{a}) > \lambda. \tag{9.28}$$

Так как $\vec{0} \in K$ и $(\vec{c}, \vec{0}) = 0 < \lambda$, то λ – положительное число.

Убедимся, что вектор $\vec{c}$ удовлетворяет системе (9.25). В противном случае хотя бы одно из неравенств системы (9.25) не выполняется при $\vec{x} = \vec{c}$. Пусть, например,

$$(\vec{a}_1, \vec{c}) > 0.$$

Тогда при достаточно большом $\alpha > 0$ будем иметь $\alpha(\vec{a}, \vec{c}) > \lambda$ или $(\vec{c}, \alpha\vec{a}_1) > \lambda$, что противоречит (9.27).

По условию, для любого решения $\vec{x}$ системы (9.25) имеем $(\vec{a}, \vec{x}) \leq 0$. Следовательно, $(\vec{a}, \vec{c}) \leq 0$. Но это противоречит неравенству (9.28), поскольку, по доказанному, λ – положительное число. Полученное противоречие доказывает теорему.

Для *неоднородной* системы неравенств ожидать справедливость подобной же теоремы не приходится. Например, если дана система, состоящая из одного неравенства $2x + 3y \leq 1$, то неравенство $2x + 3y \leq 5$, безусловно, является следствием такой системы; в то же время это неравенство не представимо в виде неотрицательной линейной комбинации неравенства $2x+3y\le 1$.

Определение. *Пусть дано неравенство*

$$f \le a \tag{9.29}$$

и пусть ε *– положительное число. Тогда неравенство*

$$f \le a + \varepsilon \tag{9.30}$$

называется ***ослаблением*** *неравенства* (9.29) (*или* ***ослабленным неравенством*** (9.29)).

Термин «ослабление» выбран потому, что множество решений неравенства (9.29) является частью множества решений неравенства (9.30).

Теорема 9.5 (Фаркаша – Минковского). *Пусть дана совместная система линейных неравенств*

$$\begin{cases} (\vec{a}_1, \vec{x}) \le \beta_1, \\ (\vec{a}_2, \vec{x}) \le \beta_2, \\ . \quad\quad . \quad\quad . \\ (\vec{a}_s, \vec{x}) \le \beta_s. \end{cases} \tag{9.31}$$

Тогда всякое неравенство $(\vec{a}, \vec{x}) \le \beta$, *являющееся следствием системы* (9.31), *является либо неотрицательной линейной комбинацией, либо ослабленной линейной комбинацией неравенств* (9.31).

Доказательство разобьем на 4 фрагмента.

Фрагмент I. Покажем, что $(\vec{a}, \vec{x}) \le 0$ *есть следствие системы* $\{(\vec{a}_i, \vec{x}) \le 0; (i = 1, \ldots, s)$.

Действительно, в противном случае найдется такой вектор $\vec{x}^\circ$, что $(\vec{a}_i, \vec{x}^\circ) \le 0$ для всех $i = 1, \ldots, s$, но $(\vec{a}, \vec{x}^\circ) > 0$. Пусть $\vec{x}^*$ – какое-нибудь решение системы (9.31). Тогда вектор $\vec{x} = \vec{x}^* + \lambda\vec{x}^\circ$ при любом $\lambda \ge 0$ будет решением системы (9.31), ибо

$$(\vec{a}_i, \vec{x}^* + \lambda\vec{x}^\circ) = (\vec{a}_i, \vec{x}^*) + \lambda(\vec{a}_i, \vec{x}^\circ),$$

и так как первое слагаемое не больше β_i, а второе не больше 0, то

$$\left(\vec{a}_i, \vec{x}^* + \lambda \vec{x}^\circ\right) \le \beta_i.$$

Но неравенство $(\vec{a}, \vec{x}) \le \beta$ есть следствие системы (9.31); значит, вектор $\vec{x}^* + \lambda \vec{x}^\circ$ удовлетворяет этому неравенству

$$\left(\vec{a}, \vec{x}^* + \lambda \vec{x}^\circ\right) \le \beta,$$

откуда

$$\left(\vec{a}, \vec{x}^*\right) + \lambda\left(\vec{a}, \vec{x}^\circ\right) \le \beta,$$

что невозможно, если $\left(\vec{a}, \vec{x}^\circ\right) > 0$ и λ – *любое* положительное число.

Фрагмент II. Покажем, что *при любом* $t > 0$ *неравенство* $(\vec{a}, \vec{x}) \le \beta t$ *есть следствие системы* $\{(\vec{a}_i, \vec{x}) \le \beta_i t; (i = 1, \ldots, s)$.

Действительно, если пара $(\vec{x}, t)$ удовлетворяет системе $\{(\vec{a}_i, \vec{x}) \le \beta_i t; (i = 1, \ldots, s)$, то вектор $\vec{y} = \frac{1}{t}\vec{x}$ удовлетворяет системе $\{(\vec{a}_i, \vec{y}) \le \beta_i; (i = 1, \ldots, s)$, а значит, удовлетворяет и неравенству $(\vec{a}, \vec{y}) \le \beta$ или $(\vec{a}, \vec{x}) \le \beta t$.

Из доказанных фрагментов I и II вытекает следующее.

Фрагмент III. $(\vec{a}, \vec{x}) \le \beta t$ *есть следствие системы*

$$\begin{cases} (\vec{a}_i, \vec{x}) \le \beta_i t \ (i = 1, \ldots, s), \\ t \ge 0. \end{cases}$$

Действительно, по доказанному, наше утверждение верно как при $t = 0$, так и при $t > 0$.

Фрагмент IV – завершение доказательства теоремы.

Утверждение III можно переформулировать так:

однородное неравенство $(\vec{a}, \vec{x}) - \beta t \le 0$ *есть следствие однородной системы*

$$\begin{cases} (\vec{a}_i, \vec{x}) - \beta_i t \le 0 \ \ (i = 1, \ldots, s), \\ -t \le 0. \end{cases}$$

Применив теорему Фаркаша, установим, что существуют такие неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \lambda_{s+1}$, что

$$\left\langle \vec{a}, -\beta \right\rangle = \lambda_1 \left\langle \vec{a}_1, -\beta_1 \right\rangle + \ldots + \lambda_s \left\langle \vec{a}_s, -\beta_s \right\rangle + \lambda_{s+1} \left\langle \vec{0}, -1 \right\rangle,$$

где запись $\left\langle \vec{x}, t \right\rangle$ означает вектор из $\mathbb{R}^{n+1}$, первые n координат которого образуют вектор $\vec{x}$, а последняя координата есть число t. Последнее равенство эквивалентно двум:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \vec{a}_i, \tag{9.32}$$

$$-\beta = -\lambda_1 \beta_1 - \ldots - \lambda_s \beta_s - \lambda_{s+1}. \tag{9.33}$$

Равенство (9.33) можно записать так:

$$\beta = \lambda_1 \beta_1 + \ldots + \lambda_s \beta_s + \lambda_{s+1}. \tag{9.34}$$

Очевидно, равенства (9.32), (9.34) с учетом неотрицательности всех чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \lambda_{s+1}$ доказывают теорему.

Теорема Фаркаша – Минковского найдет важное применение в следующем § 9.4. С применением теоремы Фаркаша мы встретимся во второй части учебника при рассмотрении вопросов выпуклого программирования.

§ 9.4. Основная теорема двойственности и ее следствия

Теорема 9.6 (основная теорема двойственности). *Если разрешима одна из двойственных задач* I *или* II, *то разрешима и другая, причем* $\max f = \min \varphi$.

Доказательство. Рассмотрим симметричные двойственные задачи линейного программирования: задачу I и задачу II. Для сокращения записей будем считать, что задача I имеет размеры 2 × 3 (два ограничения, три неизвестных), задача II – размеры 3 × 2 (табл. 9.4).

Таблица 9.4

Задача I	Задача II
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \end{cases}$ (9.35) $\begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \\ x_3 \ge 0, \end{cases}$ (9.36) $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max.$	$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge c_2, \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \ge c_3, \end{cases}$ (9.37) $\begin{cases} y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \end{cases}$ (9.38) $\varphi = b_1y_1 + b_2y_2 \to \min.$

Пусть задача I разрешима и $\overset{\circ}{X} = \left(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ\right)$ – ее оптимальное решение. Если X – любое допустимое решение задачи I, то имеем

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \le c_1x_1^\circ + c_2x_2^\circ + c_3x_3^\circ. \tag{9.39}$$

Неравенство (9.39) является, таким образом, следствием неравенств (9.35), (9.36), т.е. следствием системы

$$\begin{cases} -x_1 \le 0, \\ -x_2 \le 0, \\ -x_3 \le 0, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2. \end{cases} \tag{9.40}$$

По теореме Фаркаша – Минковского неравенство (9.39) является либо неотрицательной линейной комбинацией неравенств (9.40), либо ослабленной неотрицательной линейной комбинацией неравенств (9.40). В первом случае это означает существование неотрицательных чисел $\lambda_1^\circ, \lambda_2^\circ, \lambda_3^\circ, y_1^\circ, y_2^\circ$, таких, что

$$\begin{aligned} -\lambda_1^\circ + y_1^\circ a_{11} + y_2^\circ a_{21} = c_1, \\ -\lambda_2^\circ + y_1^\circ a_{12} + y_2^\circ a_{22} = c_2, \\ -\lambda_3^\circ + y_1^\circ a_{13} + y_2^\circ a_{23} = c_3, \end{aligned} \tag{9.41}$$

а также

$$y_1^\circ b_1 + y_2^\circ b_2 = c_1 x_1^\circ + c_2 x_2^\circ + c_3 x_3^\circ. \qquad (9.42)$$

Во втором случае вместо (9.42) должно выполняться равенство

$$y_1^\circ b_1 + y_2^\circ b_2 + \varepsilon = c_1 x_1^\circ + c_2 x_2^\circ + c_3 x_3^\circ, \qquad (9.43)$$

где ε – положительное число.

Из (9.41) следует

$$a_{11} y_1^\circ + a_{21} y_2^\circ \ge c_1,$$
$$y_1^\circ a_{12} + y_2^\circ a_{22} \ge c_2,$$
$$y_1^\circ a_{13} + y_2^\circ a_{23} \ge c_3,$$

т.е. вектор $\overset{\circ}{Y} = \left(y_1^\circ, y_2^\circ\right)$ является допустимым решением задачи II. В свою очередь, из (9.42) и (9.43) следует

$$\varphi\left(\overset{\circ}{Y}\right) \le f\left(\overset{\circ}{X}\right),$$

что в соединении с основным неравенством $\varphi(Y) \ge f(X)$ для двойственных задач дает

$$\varphi\left(\overset{\circ}{Y}\right) = f\left(\overset{\circ}{X}\right). \qquad (9.44)$$

Полученное равенство означает, что $\overset{\circ}{Y}$ есть оптимальное решение задачи II. Повторное обращение к (9.44) завершает доказательство основной теоремы.

Укажем некоторые следствия основной теоремы.

Прежде всего отметим, что поставленный в § 9.1 производственный вопрос – какую из двух возможностей для реализации остатков сырья следует использовать – имеет неожиданный ответ: любую. Действительно, равенство $\max f = \min\varphi$ означает, что максимальная прибыль, которую можно получить от изготовления из остатков сырья продукции T_1, T_2, T_3, совпадает с выручкой от продажи сырья «на сторону».

В качестве следствия рассмотрим критерий оптимальности.

Теорема 9.7 (критерий оптимальности). *Пусть* $\overset{\circ}{X}$ *и* $\overset{\circ}{Y}$ *– допустимые решения задачи* I и II (*соответственно*). *Для того чтобы* $\overset{\circ}{X}$ *было оптимальным решением задачи* I, *а* $\overset{\circ}{Y}$ *– оптимальным решением задачи* II, *необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$f\left(\overset{\circ}{X}\right)=\varphi\left(\overset{\circ}{Y}\right). \tag{9.45}$$

Действительно, если $\overset{\circ}{X}$ и $\overset{\circ}{Y}$ – оптимальные решения, то $f\left(\overset{\circ}{X}\right)=\max f$, $\varphi\left(\overset{\circ}{Y}\right)=\min\varphi$, и равенство (9.45) вытекает из основной теоремы. Обратно, если справедливо (9.45), то согласно следствию I из § 9.1 решения $\overset{\circ}{X}$ и $\overset{\circ}{Y}$ оптимальны.

Другим следствием из основной теоремы является предложение, носящее название «теорема равновесия». Прежде чем его сформулировать, введем так называемые *невязки*. Это разности между левыми и правыми частями ограничений, заданных в форме (9.6) и (9.8) в табл. 9.2. Если задача I имеет размеры $m\times n$ и X – любое допустимое решение, то соответствующие ему невязки будут:

$$\widetilde{y}_i=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}x_\alpha-b_i \quad (i=1,2,...,m).$$

Аналогично запишутся невязки для задачи II:

$$\widetilde{x}_j=\sum_{\beta=1}^{m}a_{\beta j}y_\beta-c_j \quad (j=1,2,...,n).$$

Очевидно, все $\widetilde{y}_i\le 0$, а все $\widetilde{x}_j\ge 0$. Если какая-либо из невязок равна нулю, то соответствующее ей ограничение обращается в равенство.

Теорема 9.8 (равновесия). *Пусть X и Y – допустимые решения задач* I *и* II. *Для одновременной оптимальности этих решений необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$x_j \tilde{x}_j = 0 \quad (j = 1, 2, ..., n), \tag{9.46}$$

$$y_i \tilde{y}_i = 0 \quad (i = 1, 2, ..., m). \tag{9.47}$$

Доказательство. Как мы уже знаем, для оптимальности X и Y необходимо и достаточно выполнение равенства $f(X) = \varphi(Y)$ или, как следует из (9.16), одновременное выполнение двух равенств:

$$X^T A^T Y = f(X), \tag{9.48}$$

$$X^T A^T Y = \varphi(Y). \tag{9.49}$$

Раскрывая произведение $X^T A^T Y$ по правилу умножения матриц, найдем, что оно представляет собой число, равное сумме всех чисел вида $a_{ij} x_j y_i$. Пусть задача I имеет размеры $m \times n$, тогда равенства (9.48) и (9.49) примут вид:

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n, \tag{9.50}$$

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m, \tag{9.51}$$

где в знаке суммирования индекс i принимает значения 1, ..., m, а индекс j – значения 1, ..., n.

Запишем (9.50) по-другому:

$$x_1\left(\sum_i a_{ij} y_j - c_1\right) + x_2\left(\sum_n a_{ij} - c_2\right) + ... + x_n\left(\sum_i a_{in} y_i - c_n\right) = 0$$

или, что то же,

$$x_1 \tilde{x}_1 + x_2 \tilde{x}_2 + ... + x_n \tilde{x}_n = 0. \tag{9.52}$$

Аналогичным образом запишется и равенство (9.51):

$$y_1 \tilde{y}_1 + y_2 \tilde{y}_2 + ... + y_m \tilde{y}_m = 0. \tag{9.53}$$

Итак, для оптимальности решений X и Y необходимо и достаточно (одновременное) выполнение равенств (9.52) и (9.53).

Учитывая, что слагаемые $x_1\tilde{x}_1, ..., x_n\tilde{x}_n$ в (9.52) имеют один и тот же знак (ибо все $x_j \geq 0$ и все $\tilde{x}_j \geq 0$), приходим к заключению, что равенство (9.52) эквивалентно системе равенств (9.46); аналогично равенство (9.53) эквивалентно системе равенств (9.47). Теорема доказана.

Проанализируем условия оптимальности (9.46) и (9.47). Очевидно, (9.46) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} &x_j \neq 0 \Rightarrow \tilde{x}_j = 0, \\ &\tilde{x}_j \neq 0 \Rightarrow x_j = 0, \end{aligned} \tag{9.54}$$

а условие (9.47) в аналогичной форме:

$$\begin{aligned} &y_i \neq 0 \Rightarrow \tilde{y}_i = 0, \\ &\tilde{y}_i \neq 0 \Rightarrow y_i = 0. \end{aligned} \tag{9.55}$$

Это означает следующее: *если в оптимальном решении одной из двойственных задач одна из компонент отлична от нуля, то для любого оптимального решения другой задачи соответствующая невязка равна нулю; если для оптимального решения одной из задач какая-либо невязка отлична от нуля, то для любого оптимального решения другой задачи соответствующая компонента равна нулю*.

Данные утверждения устанавливают известное равновесие между задачами I и II: если в одной задаче нечто отлично от нуля, то в двойственной задаче нечто равно нулю. Отсюда название “теорема равновесия”. Заметим, что (9.54), (9.55) называют также *условиями дополняющей нежесткости*.

Условия (9.54), (9.55) имеют простой экономический смысл. Обратимся к производственной задаче из § 9.1. Предположим, что для некоторого оптимального решения X задачи I и некоторого номера i (1 или 2) выполняется условие $\tilde{y}_i \neq 0$ или, что то же,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 < b_i.$$

Это означает, что расход сырья S_i строго меньше его запаса – сырье S_i не является дефицитным. В этом случае, согласно (9.55), мы должны иметь $y_i = 0$, т.е. продажная цена сырья S_i должна равняться 0. Мы видим, что величина y_i выступает в роли "меры дефицитности" сырья S_i. Отсюда и название для величин y_i (компонент оптимального решения двойственной задачи) – *двойственные цены*. Иногда их также называют *объективно обусловленными оценками*.

Проанализируем еще раз ситуацию с недефицитным сырьем. Пусть один из видов сырья, скажем S_1, оказался недефицитен, т.е. для некоторого оптимального решения X имеем

$$a_{11}\overset{\circ}{x}_1 + a_{12}\overset{\circ}{x}_2 + a_{13}\overset{\circ}{x}_3 < b_1.$$

Представляется очевидным, что в этом случае увеличение запаса сырья S_1 не должно оказывать влияния на прибыль, т.е. на $\max f$. Дадим обоснование такого заключения с помощью теоремы равновесия.

Пусть $\overset{\circ}{Y}$ – некоторое оптимальное решение задачи II. Сразу же отметим, что $\overset{\circ}{y}_1 = 0$: в противном случае мы имели бы согласно (9.55) $\widetilde{y}_1 = 0$, т.е. $a_{11}\overset{\circ}{x}_1 + a_{12}\overset{\circ}{x}_2 + a_{13}\overset{\circ}{x}_3 = b_1$, вопреки предположению. Дадим запасу b_1 приращение $\Delta b_1 > 0$; измененные в результате этого задачи I и II обозначим I_Δ и II_Δ. Пусть M и M_Δ – множества допустимых решений задач I и I_Δ (соответственно). Так как при переходе от задачи I к I_Δ меняется (увеличивается) лишь правая часть в одном из ограничений $\left(b_1 \to b_1 + \Delta b_1\right)$, то ясно, что $M \subset M_\Delta$. Ясно также, что $M' = M'_\Delta$ (где штрих относится к двойственным задачам), ибо система ограничений в задачах II и II_Δ одна и та же. Отсюда видно, что решения $\overset{\circ}{X}$ и $\overset{\circ}{Y}$ являются допустимыми для задач I_Δ и II_Δ. Далее, с переходом от задач I и II к задачам I_Δ и II_Δ меняется лишь одна из невязок: $a_{11}\overset{\circ}{x}_1 + a_{12}\overset{\circ}{x}_2 + a_{13}\overset{\circ}{x}_3 - b_1$ превращается в $a_{11}\overset{\circ}{x}_1 + a_{12}\overset{\circ}{x}_2 + a_{13}\overset{\circ}{x}_3 -$

$-\left(b_1+\Delta b_1\right)$, а значит, остается отличной от нуля. Между тем $\overset{\circ}{y}_1=0$. Следовательно, для допустимых решений $\overset{\circ}{X}$ и $\overset{\circ}{Y}$ задач I_Δ и II_Δ остаются в силе условия (9.54) и (9.55). Тем самым $\overset{\circ}{X}$ и $\overset{\circ}{Y}$ будут оптимальными для задач I_Δ и II_Δ. Учитывая, что при переходе от I к I_Δ целевая функция *f* не меняется, находим

$$\underset{(\text{для I})}{\max f = f\left(\overset{\circ}{X}\right)}, \qquad \underset{(\text{для } \mathrm{I}_\Delta)}{\max f = f\left(\overset{\circ}{X}\right)},$$

т.е. max *f* не меняется с переходом от задачи I к задаче I_Δ, что и требовалось показать.

Итак, *если какое-либо сырье S_i недефицитно, то увеличение запаса этого сырья не изменяет величины* max *f* (*прибыли*). Нетрудно видеть, что и уменьшение запаса S_i до определенного момента не влияет на прибыль, а именно до тех пор, пока сырье S_i остается недефицитным.

Рассмотрим в заключение такой вопрос. Прибыль z = max *f* зависит в числе прочего от b_1 и b_2 (запасов). Пусть при малом изменении какого-то из запасов b_i, например b_1, вектор $\overset{\circ}{Y}$ остается решением двойственной задачи (в частности, так будет, если сырье S_1 недефицитно). С какой скоростью меняется величина z = max *f* (прибыль) при изменении b_1?

Учитывая, что одновременно $z=\min \varphi$, будем иметь

$$z=b_1\overset{\circ}{y}_1+b_2\overset{\circ}{y}_2,$$

$$z+\Delta z=\left(b_1+\Delta b_1\right)\overset{\circ}{y}_1+b_2\overset{\circ}{y}_2,$$

откуда следует

$$\Delta z=\Delta b_1\cdot\overset{\circ}{y}_1.$$

Отсюда имеем такое равенство: $\dfrac{dz}{db_1} = \overset{\circ}{y}_1$, т.е. двойственная оценка выступает как *скорость изменения прибыли.* В частности, это означает, что зависимость max f от b_1 является линейной. Еще раз подчеркнем, что это заключение справедливо при условии неизменности оптимального решения двойственной задачи.

§ 9.5. Применение двойственности в однопродуктовой задаче

Изучим однопродуктовый аналог рассмотренной ранее задачи об использовании ресурсов. Вначале дадим общую постановку задачи, после чего на числовом примере покажем, как теорема равновесия позволяет получить решение прямой задачи, используя решение двойственной задачи. Затем вернемся к общему случаю и изучим зависимость выпуска продукции от затрат используемых ресурсов. Отметим, что такая зависимость обычно называется *производственной функцией*.

Предположим, что некоторое предприятие, производящее однородную продукцию, может в процессе производства использовать n различных технологий. Пусть m – число расходуемых ресурсов; b_i – доступное на период планирования количество ресурса i (i = 1, 2, ..., m); x_j – интенсивность применения технологии j (j = 1, 2, ..., n). В конкретных задачах мерой интенсивности могут служить: количество произведенной по данной технологии продукции, длительность применения технологии, число занятых рабочих и т.п.

Предположим также, что затраты z_{ij} ресурса i при работе по технологии j линейно зависят от интенсивности ее применения:

$$z_{ij} = a_{ij}\, x_j,$$

где a_{ij} – количество единиц ресурса i, расходуемых при использовании технологии j с единичной интенсивностью.

Система ограничений по ресурсам имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{9.56}$$

Кроме того, выполняются условия неотрицательности

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, ...,\ x_n \geq 0. \tag{9.57}$$

Выпуск продукции f составит

$$f = q_1 x_1 + q_2 x_2 + ... + q_n x_n,$$

где q_j – количество продукции, производимой при единичной интенсивности применения технологии j. Таким образом, мы приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$f \to \max \text{ при условиях (9.56), (9.57).} \tag{9.58}$$

Решение задачи (9.58) должно дать ответ на вопрос: с какой интенсивностью следует использовать каждую из технологий, чтобы добиться максимального выпуска продукции?

Заметим, что в случае, когда интенсивность применения технологии измеряется количеством произведенной по данной технологии продукции, имеем: $q_1 = q_2 = ... = q_n = 1$. Предположим, что все коэффициенты a_{ij} неотрицательны и для каждой технологии j = 1, 2, ..., n хотя бы один коэффициент $a_{ij} \neq 0$. Последнее условие означает, что мы не рассматриваем технологии, производящие продукцию из ничего. Этих естественных предположений достаточно для разрешимости задачи (9.58). Действительно, во-первых, допустимое множество не пусто, так как имеется нулевое решение x = (0, 0, ..., 0), во-вторых, из ограничений (9.56) и (9.57) следует, что $x_i \leq \dfrac{b_i}{a_{ij}}$, поэтому целевая функция ограничена. Разрешимость теперь следует из теоремы 7.1 § 7.2.

Запишем ограничения двойственной задачи:

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \geq q_1, \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \geq q_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_m \geq q_m, \end{cases} \tag{9.59}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, ...,\ y_m \geq 0. \tag{9.60}$$

Пусть $\varphi = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m$. Тогда двойственная задача имеет вид

$$\varphi \to \min \text{ при условиях (9.59) и (9.60).} \qquad (9.61)$$

Если задача (9.61) допускает более простое решение, чем непосредственное решение задачи (9.58), то для решения задачи (9.58) имеет смысл воспользоваться теоремой равновесия. Проиллюстрируем эту идею на следующем примере.

Пример 9.1. Пусть предприятие, выпускающее однородную продукцию, может использовать четыре технологии, применение которых связано с расходом двух ресурсов. Затраты ресурсов a_{ij} на единицу продукции указаны в табл. 9.5.

Таблица 9.5

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$i = 2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Пусть x_j – количество продукции, произведенной по технологии j. Найдем вектор $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$, для которого выпуск продукции $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ максимален при условии, что число доступных единиц ресурса i ($i = 1, 2$) равно b_j.

Для данного примера общая задача (9.58) приобретает вид

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{8}x_4 \le b_1, \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \le b_2, \\ x_j \ge 0 \left(j = 1, 2, 3, 4\right), \end{cases} \qquad (9.62)$$

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$$

а общая задача (9.61)

$$\begin{cases} \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_2 \geq 1, \\ \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2 \geq 1, \\ \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \geq 1, \\ \frac{1}{8}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \geq 1, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, \end{cases} \tag{9.63}$$

$$\varphi = b_1 y_1 + b_2 y_2 \to \min.$$

Прямое решение задачи (9.62) затруднено тем, что допустимое множество зависит от параметров b_1 и b_2. В то же время в задаче (9.63) допустимое множество не зависит от параметров b_1, b_2, а сама задача допускает решение графическим методом.

Пусть $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$, $\widetilde{x}_3$, $\widetilde{x}_4$, $\widetilde{y}_1$, $\widetilde{y}_2$ – участвующие в теореме равновесия невязки задач (9.62) и (9.63):

$$\widetilde{y}_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - b_1,$$

$$\widetilde{y}_2 = \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - b_2,$$

$$\widetilde{x}_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_2 - 1,$$

$$\widetilde{x}_2 = \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2 - 1,$$

$$\widetilde{x}_3 = \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - 1,$$

$$\widetilde{x}_4 = \frac{1}{8}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - 1.$$

Построим на координатной плоскости y_1, y_2 следующие четыре прямые:

$$\tilde{x}_1 = 0,\ \tilde{x}_2 = 0,\ \tilde{x}_3 = 0,\ \tilde{x}_4 = 0.$$

Именно эти прямые (вместе с прямыми $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$) ограничивают допустимое множество задачи (9.63). Определив для каждой прямой, с какой стороны от нее расположено допустимое множество, находим это множество и его угловые точки: $A(0;\ 6)$, $B(2;\ 2)$, $C(4;\ 1)$, $D(8;\ 0)$ (рис. 9.2).

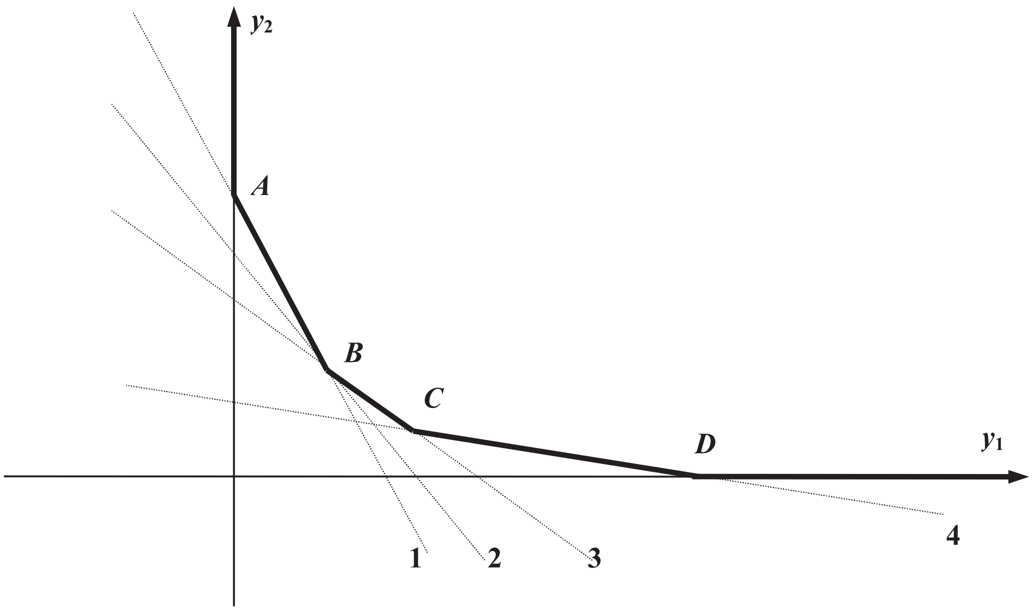

Рис. 9.2

Решение задачи (9.63) получим, рассмотрев значения целевой функции φ в угловых точках A, B, C, D. Имеем

$$\min \varphi = \min\{\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)\} =$$

$$= \min\ \{6b_2,\ 2b_1 + 2b_2,\ 4b_1 + b_2,\ 8b_1\}. \qquad (9.64)$$

В случае, когда $b_1 = 0$, имеем $\min\varphi = 0$. Теперь предположим, что $b_1 \neq 0$, и перепишем (9.64) в следующем виде:

$$\min\varphi = b_1 \min\ \{6t,\ 2 + 2t,\ 4 + t,\ 8\}, \qquad (9.65)$$

где мы положили $t = \dfrac{b_2}{b_1}$. Для того чтобы уточнить зависимость $\min\varphi$ от значений аргумента t, построим графики данных линейных функций (рис. 9.3).

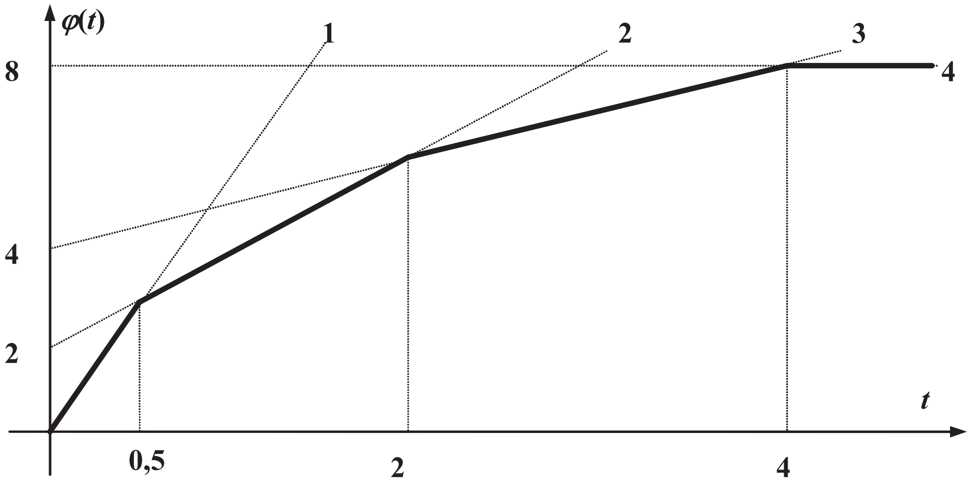

Рис. 9.3

Из рисунка видно, что выражение для минимума целевой функции зависит от аргумента $t = \dfrac{b_2}{b_1}$ следующим образом:

$$\min\varphi = \begin{cases} \varphi(A) = 6b_2, & 0 \le t \le 0{,}5, \\ \varphi(B) = 2b_1 + 2b_2, & 0{,}5 \le t \le 2, \\ \varphi(C) = 4b_1 + b_2, & 2 \le t \le 4, \\ \varphi(D) = 8b_1, & 4 \le t. \end{cases} \qquad (9.66)$$

Из рис. 9.3 непосредственно видно, что с ростом аргумента t наклон огибающей ломаной, выделенной жирным, уменьшается. В частности, фиксируем b_1, тогда b_2 пропорциональна t, так что эта закономерность сохранится. Таким образом, мы показали, что при фиксированном b_1 с увеличением b_2 наклон графика

$$Q = \min\varphi = \max f$$

уменьшается. Этот факт подтверждает широко применяемый в экономической теории тезис:

Отдача от дополнительных единиц ресурса уменьшается при увеличении количества доступных единиц данного ресурса, если остальные ресурсы остаются постоянными.

Рассмотрим особенности нахождения оптимального решения исходной задачи (9.62) на примерах.

1. Пусть для определенности $b_1 = 3$, $b_2 = 1$. Тогда из (9.66) имеем

$$\min\varphi = \varphi(0, 6) = 6.$$

Из рис. 9.2 видно, что точка A не принадлежит прямым $\tilde{x}_2 = 0$, $\tilde{x}_3 = 0$, $\tilde{x}_4 = 0$ и $y_2 = 0$. Следовательно, для $Y^* = A$ имеем:

$$\tilde{x}_2 \neq 0,\ \tilde{x}_3 \neq 0,\ \tilde{x}_4 \neq 0,\ y_2^* \neq 0.$$

По теореме равновесия получаем условия оптимальности для допустимого решения задачи (9.62):

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0,\ \tilde{y}_2 = 0,$$

которые можно переписать в виде следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{6}x_1 = 1, \\ x_2 = x_3 = x_4 = 0. \end{cases}$$

Окончательно получим

$$\max f = f(6, 0, 0, 0) = 6 = \min\varphi = \varphi(0, 6).$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда $b_1 = b_2 = 1$. Тогда из (9.66) имеем

$$\min\varphi = \varphi(2, 2) = 4.$$

Так как точка B не принадлежит прямым $\tilde{x}_4 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, то для $Y^* = B$ имеем

$$\tilde{x}_4 \neq 0,\ \ y_1^* \neq 0,\ \ y_2^* \neq 0.$$

Из теоремы равновесия получаем условие оптимальности для X^*:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{6}x_3=1, \\ \frac{1}{6}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{3}x_3=1, \\ x_4=0. \end{cases}$$

Выражая x_1 и x_3 через x_2, имеем

$$\begin{cases} x_1=2-\frac{1}{2}x_2, \\ x_3=2-\frac{1}{2}x_2. \end{cases}$$

Учитывая неотрицательность переменных x_1, x_3, получим интервал изменения x_2: $0 \le x_2 \le 4$. Таким образом, в этом случае

$$\max f = f\left(2-\frac{1}{2}x_2,\, 0 \le x_2 \le 4,\, 2-\frac{1}{2}x_2,\, 0\right) = 4 = \min \varphi = \varphi(2, 2).$$

Аналогично разбираются и остальные случаи.

§ 9.6. Другое доказательство основной теоремы двойственности. Метод одновременного решения пары двойственных задач

Рассмотрим снова взаимно двойственные задачи I и II. Между их решениями существует, как мы знаем, связь, выражаемая равенством $\max f = \min \varphi$.

В действительности эта связь намного глубже. Оказывается, что симплекс-метод, примененный к одной из задач, автоматически решает и другую.

Для краткости снова будем считать, что задача I имеет размеры 2×3, а задача II – размеры 3×2. Произведем ряд уточнений.

1. Представим обе задачи как задачи на нахождение минимума, для чего перейдем в задаче I от функции f к функции $F = -f$. Наконец (смысл этого станет ясен позднее), введем в выражения для f и φ некоторый свободный член d; тогда в выражении для F появится свободный член $-d$.

Итак, имеем две двойственные задачи. Запишем их в табл. 9.6, аналогичной табл. 9.2.

Таблица 9.6

Задача I	Задача II
$\{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \quad (9.67)$	$\{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, \quad (9.69)$
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2, \end{cases} \quad (9.68)$	$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq c_2, \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \geq c_3, \end{cases} \quad (9.70)$
$F = -d - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 \to \min.$	$\varphi = d + b_1y_1 + b_2y_2 \to \min.$

2. Преобразуем эти задачи в канонические, введя дополнительные (балансовые) переменные: x_4, x_5 для задачи I и y_3, y_4, y_5 для задачи II. В итоге системы ограничений примут вид (табл. 9.7).

Таблица 9.7

Для задачи I	Для задачи II
$\begin{cases} x_4 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3, \\ x_5 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3, \end{cases} \quad (9.71)$	$\begin{cases} y_3 = -c_1 + a_{11}y_1 + a_{21}y_2, \\ y_4 = -c_2 + a_{12}y_1 + a_{22}y_2, \\ y_5 = -c_3 + a_{13}y_1 + a_{23}y_2. \end{cases} \quad (9.72)$

Если в системе (9.71) числа b_1 и b_2 неотрицательны, то переменные x_4 и x_5 образуют в этой системе допустимый базис. Аналогично, если $-c_1 \geq 0$, $-c_2 \geq 0$, $-c_3 \geq 0$, то переменные, y_3, y_4, y_5 образуют допустимый базис в (9.72). Чтобы не связывать себя условием неотрицательности свободных членов, расширим на некоторое время понятие допустимого базиса, сняв условие неотрицательности свободных членов. Тогда можно считать, что переменные x_4, x_5 – независимо от того, какие знаки имеют числа b_1, b_2, $-c_1$, $-c_2$, $-c_3$, – являются базисными для задачи I, а переменные y_3, y_4, y_5 – базисными для задачи II.

3. Между переменными обеих задач можно установить естественное соответствие. Рассмотрим, например, переменную x_4, являющуюся базисной в (9.71). В выражении $x_4 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3$ коэффициенты при свободных переменных, т.е. числа $-a_{11}$, $-a_{12}$, $-a_{13}$, лишь знаками отличаются от коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{13} при y_1 в (9.72). В соответствии с этим будем считать, что переменной x_4 соответствует y_1. Аналогичным образом, если взять, например, переменную y_3, являющуюся базисной в (9.72), то можно видеть, что в ее выражении через свободные переменные коэффициенты при последних лишь знаками отличаются от коэффициентов при x_1 в (9.71); поэтому считаем, что переменной y_3 соответствует x_1.

В итоге устанавливаем следующее соответствие:

$$x_4 \to y_1,\;\; x_5 \to y_2,\;\; y_3 \to x_1,\;\; y_4 \to x_2,\;\; y_5 \to x_3,$$

при котором базисным переменным одной задачи отвечают свободные переменные другой. Будем считать соответствие взаимным и писать:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_3 & y_4 & y_5 & y_1 & y_2. \end{matrix} \tag{9.73}$$

Установленное соответствие между переменными позволяет следующим образом охарактеризовать *связь между задачами* I и II.

1. Пусть x_i – базисная, а x_j – свободная переменная в задаче I; пусть им отвечают (соответственно) переменные y_k и y_l в задаче II:

$$\begin{matrix} x_i\ (\text{базисная}) & x_j\ (\text{свободная}) \\ \updownarrow & \updownarrow \\ y_k\ (\text{свободная}) & y_l\ (\text{базисная}) \end{matrix}$$

Тогда коэффициент, с которым x_j входит в выражение для x_i, лишь знаком отличается от коэффициента, с которым y_k входит в выражение для y_l:

$$x_i = \ldots + \alpha x_j + \ldots, \quad y_l = \ldots - \alpha y_k + \ldots \ .$$

2. Свободные члены в выражениях для базисных переменных одной из задач равны коэффициентам при соответствующих свободных переменных в целевой функции другой задачи.

3. Свободный член в выражении для F через свободные переменные лишь знаком отличается от свободного члена в выражении для φ.

Справедливо следующее предложение.

Указанная выше связь (см. 1, 2, 3) *между записями задач* I *и* II *сохраняется при согласованных заменах базисов в этих задачах.*

Поясним это. Пусть в задаче I производится, например, следующая замена базиса:

$$x_1 \leftrightarrow x_4,$$

т.е. переменная x_1 из свободных переводится в базисные, а переменная x_4, наоборот, из базисных переводится в свободные. Разумеется, для осуществления такой замены необходимо, чтобы было $a_{11} \neq 0.$ В этом случае возможна и замена

$$y_3 \leftrightarrow y_1.$$

Выделенное курсивом предложение означает, что после осуществления таких согласованных замен связь между записями задач I и II, указанная в положениях 1, 2, 3, *сохраняется.* Предоставляем читателю убедиться в справедливости этого предложения, выполнив соответствующие преобразования над записями задач I и II.

Предположим теперь, что в одной из систем (9.71), (9.72) свободные члены в правых частях неотрицательны (именно так и обстояло дело в производственной задаче из § 9.1, где было $b_1 > 0$ и $b_2 > 0$). Пусть, например, $b_1 \geq 0, \ b_2 \geq 0.$ Тогда к задаче I можно непосредственно применить симплекс-метод. Исходная симплекс-таблица (табл. 9.8) будет иметь вид

Таблица 9.8

Базисные неизвестные и F	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0
x_5	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1
F	$-d$	c_1	c_2	c_3	0	0

Заметим, что соответствующая таблица для задачи II может быть составлена исходя из табл. 9.8 автоматически на основании соответствия (9.73) и правил 1, 2, 3; она запишется как табл. 9.9.

Таблица 9.9

Базисные неизвестные и φ	Свободные члены	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_3	$-c_1$	$-a_{11}$	$-a_{21}$	1	0	0
y_4	$-c_2$	$-a_{12}$	$-a_{22}$	0	1	0
y_5	$-c_3$	$-a_{13}$	$-a_{23}$	0	0	1
φ	d	$-b_1$	$-b_2$	0	0	0

Однако следует иметь в виду, что табл. 9.9 не обязательно является симплекс-таблицей в полном смысле, поскольку числа $-c_1$, $-c_2$, $-c_3$ не обязательно больше или равны 0.

Итак, будем решать симплекс-методом задачу I. После ряда шагов придем к оптимальному решению. В заключительной симплекс-таблице все числа столбца свободных членов (кроме, может быть, последнего числа) неотрицательны, а все числа строки F (кроме, быть может, первого числа) неположительны. Но тогда на основании правил 1, 2, 3 можем заключить, что в соответствующей таблице для задачи II все свободные члены неотрицательны, а все числа строки φ неположительны (за указанными исключениями). Это означает, что в задаче II также достигнуто оптимальное решение. При этом, поскольку числа, стоящие на пересечении столбца свободных членов и строки для целевой функции, в обеих таблицах отличаются лишь знаком, приходим к заключению, что $\min F = -\min \varphi$ или, что то же самое, $\max f = \min \varphi$, что и доказывает основную теорему двойственности.

Попутно мы получили следующий метод одновременного решения пары взаимно двойственных задач I и II. *Приводим обе задачи к каноническому виду и устанавливаем соответствие между переменными обеих задач. Далее решаем с помощью симплекс-метода ту из двух задач, где свободные члены в выражениях для базисных неизвестных неотрицательны (предполагается, что одна из задач таким свойством обладает). Из последней симплекс-таблицы выделяем строку для целевой функции. Если числа, стоящие в ней, начиная со второго, взять с противоположными знаками, а затем воспользоваться соответствием между переменными обеих задач, то получим оптимальное решение двойственной задачи. Первое же число в указанной строке дает искомый оптимум целевой функции.*

Пример 9.2. Пусть в результате решения задачи I получена следующая симплекс-таблица.

Таблица 9.10

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	4	–1	0	3
x_4	7	0	–6	–5	1	6
F	150	0	–2	–3	0	–1

Предположим также, что соответствие между переменными обеих задач имеет вид (9.73). На основании этих данных запишем решение задачи II.

Для этого нам достаточно знать лишь фрагмент табл. 9.10:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
...	...	...	...	...	...	...
F	150	0	–2	–3	0	–1

Учитывая соответствие (9.73), получаем, что оптимальное решение задачи II будет

$$y_3 = 0, y_4 = 2, y_5 = 3, y_1 = 0, y_2 = 1,$$

причем

$$\min\varphi = -\min F = -150.$$

§ 9.7. Несимметричные двойственные задачи

Так называются следующие две задачи линейного программирования:

Задача L	Задача M
$\begin{cases} AX = B \\ X \geq 0 \end{cases}$ $C^T X \to \max$	$A^T Y \geq C$ $B^T Y \to \min$

От соответствующих задач I и II § 9.1 (матричная форма записи задач (табл. 9.3)) они отличаются тем, что:

а) все ограничения в задаче L имеют вид уравнений, в то время как в задаче I это неравенства;

б) в задаче M отсутствует условие неотрицательности неизвестных; таким образом, неизвестные в этой задаче могут быть любого знака.

Для упрощения записей будем считать, как и в § 9.1, что задача L имеет размеры 2×3. Итак:

Задача L	Задача M
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \end{cases}$ (9.74) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, (9.75) $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max$. (9.76)	$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq c_2, \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \geq c_3, \end{cases}$ (9.77) $\varphi = b_1y_1 + b_2y_2 \to \min$. (9.78)

Воспользуемся тем, что любое линейное уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ может быть заменено эквивалентной ему системой из двух неравенств $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b$ и $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq b$, т.е. системой вида

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b, \\ -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 \leq -b. \end{cases}$$

Проделав такую замену с каждым из уравнений (9.74), запишем задачу L в следующем виде:

Задача I

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \le -b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \le -b_2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max.$$

Двойственная задача (§ 9.1) будет иметь размеры 3×4. Обозначим неизвестные в этой задаче u_1, v_1, u_2, v_2. Итак:

Задача II

$$\begin{cases} a_{11}u_1 - a_{11}v_1 + a_{21}u_2 - a_{21}v_2 \ge c_1, \\ a_{12}u_1 - a_{12}v_1 + a_{22}u_2 - a_{22}v_2 \ge c_2, \\ a_{13}u_1 - a_{13}v_1 + a_{22}u_2 - a_{23}v_2 \ge c_3, \end{cases}$$

$$u_1 \ge 0, \quad v_1 \ge 0, \quad u_2 \ge 0, \quad v_2 \ge 0,$$

$$\Phi = b_1u_1 - b_1v_1 + b_2u_2 - b_2v_2 \to \min$$

или, что то же самое:

Задача II

$$\begin{cases} a_{11}(u_1 - v_1) + a_{21}(u_2 - v_2) \ge c_1 \\ a_{12}(u_1 - v_1) + a_{22}(u_2 - v_2) \ge c_2 \,, \\ a_{13}(u_1 - v_1) + a_{23}(u_2 - v_2) \ge c_3 \end{cases}$$

$$u_1 \ge 0\,, \; v_1 \ge 0\,, \; u_2 \ge 0\,, \; v_2 \ge 0\,,$$

$$\Phi = b_1(u_1 - v_1) + b_2(u_2 - v_2) \to \min\,.$$

Если существует решение задачи I, то в силу теоремы двойственности существует и решение задачи II, причем $\max f = \min \Phi$.

Сравнивая задачи M и II, мы замечаем, что они, в сущности, эквивалентны. В самом деле, если y_1, y_2 – какое-либо решение задачи M, то, взяв любые 4 неотрицательных числа u_1, v_1, u_2, v_2, удовлетворяющих условиям

$$u_1 - v_1 = y_1,\ \ u_2 - v_2 = y_2 \qquad (9.79)$$

(что, очевидно, возможно), получим решение задачи II. Наоборот, если u_1, v_1, u_2, v_2 есть решение задачи II, то числа y_1, y_2, найденные по формулам (9.79), дают решение задачи M. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме, которая является, по существу, одним из вариантов теоремы двойственности.

Теорема 9.9. *Если задача L имеет решение, то задача M также имеет решение*; *при этом* $\max f = \min \varphi$.

В заключение укажем общую постановку взаимно двойственных задач, когда система ограничений включает как уравнения, так и неравенства.

Задача I	Задача II
$AX \le B,$ (9.80) $X_1 \ge 0,$ (9.81) $f = C^T X \to \max.$	$A^T Y \ge C,$ (9.82) $Y_1 \ge 0,$ (9.83) $\varphi = B^T Y \to \min.$

Здесь предполагается, что:

1. В системе (9.80) некоторые ограничения являются неравенствами (типа $\le$), а некоторые – уравнениями. Вектор Y_1 является частью вектора Y; неизвестное y_i входит в Y_1 тогда и только тогда, когда i-е ограничение в системе (9.80) является неравенством.

2. Система (9.82) также состоит из неравенств (типа $\ge$) и уравнений. Вектор X_1 является частью X; неизвестное x_j входит в X_1 тогда и только тогда, когда j-е ограничение в системе (9.82) является неравенством.

Теорема двойственности (общая) утверждает, что *если разрешима задача* I, *то разрешима и задача* II, *причем* $\max f = \min \varphi$.

Пример 9.3. Если в качестве исходной задачи взять

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 \le -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 \le 3, \\ x_2 + 5x_3 - 6x_5 = 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0,$$

$$f = 7x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 \to \max,$$

то двойственная задача будет

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \ge 7, \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1, \\ 4y_1 - 3y_2 + 5y_3 \ge 0, \\ -y_1 + 4y_2 = -11, \\ y_1 - 5y_2 - 6y_3 = 2, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \ y_2 \ge 0,$$

$$\varphi = -y_1 + 3y_2 + 2y_3 \to \min.$$

Часто бывает так, что двойственную задачу решить проще, чем исходную.

ГЛАВА 10

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 10.1. Метод наименьших квадратов

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{10.1}$$

Предположим, что система (10.1) является результатом теоретического исследования, а вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – результатом практических наблюдений. В каком случае можно утверждать, что фактические данные x подтверждают теорию?

Если вектор x является решением системы (10.1), то все ясно: данные подтверждают теорию. Такой случай, однако, встречается редко. Поэтому считается, что полученные данные x не опровергают теорию, если вектор x является хотя бы приближенным решением системы (10.1).

Уточним смысл приближенного решения. Назовем i-й ошибкой системы (10.1), связанной с вектором x, следующую разность:

$$e_i = (a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n) - b_i.$$

Ошибку $S(x)$ всей системы (10.1) можно определить, по крайней мере, одним из трех способов:

$$S(x) = e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2, \tag{10.2}$$

$$S(x) = |e_1| + |e_2| + \ldots + |e_n|, \tag{10.3}$$

$$S(x) = \max\{|e_1|, |e_2|, \ldots, |e_n|\}. \tag{10.4}$$

Пусть функция ошибки $S(x)$ задана одной из формул (10.2), (10.3), (10.4) или еще каким-либо образом. Произвольный вектор x считается *приближенным решением* системы (10.1), если связанная с ним ошибка $S(x)$ не превосходит заранее заданного критического значения $\varepsilon_{кр}$. Нетрудно видеть, что приближенное решение системы (10.1) сводится к отысканию точки x^*, в которой функция $S(x)$ принимает наименьшее значение (т.е. точки минимума).

Действительно, пусть точка минимума x^* уже найдена. Тогда возможны два случая:

1) $S(x^*) \le \varepsilon_{кр}$;

2) $S(x^*) > \varepsilon_{кр}$.

В первом случае x^* есть наилучшее приближенное решение – задача решена. Во втором случае система (10.1) не имеет приближенных решений.

Алгоритм поиска точки минимума существенно зависит от вида функции $S(x)$. Этот алгоритм является наиболее простым, если $S(x)$ задана формулой (10.2), что, возможно, объясняет большую популярность определения ошибки системы именно формулой (10.2).

Методом наименьших квадратов называется способ решения системы (10.1), основанный на нахождении точки x^*, в которой сумма квадратов ошибок (10.2) принимает наименьшее значение. Обычно для нахождения минимума функции $S(x)$ вычисляются ее производные. Однако такой подход не является единственно возможным. Ниже мы дадим геометрическую интерпретацию функции $S(x)$ и найдем ее точку минимума, не выходя за рамки линейной алгебры.

Рассмотрим сначала случай, когда число уравнений $m = 3$, а число неизвестных $n = 2$. Перепишем систему (10.1) в векторном виде

$$x_1A_1 + x_2A_2 = B, \tag{10.5}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Определим вектор ошибок системы (10.5):

$$\Delta = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - b_3 \end{pmatrix} = x_1 A_1 + x_2 A_2 - B.$$

Из определения вектора ошибок Δ следует, что

$$S(x) = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = |\Delta|^2.$$

Пусть $C = x_1A_1 + x_2A_2$ – линейная комбинация векторов A_1 и A_2, соответствующая вектору $x = (x_1, x_2)$. Тогда вектор ошибок Δ можно представить как

$$\Delta = C - B = \overrightarrow{BC}.$$

Следовательно, $S(x) = |\Delta|^2$ – это квадрат расстояния между точками B и C.

Пусть Π – плоскость в $\mathbb{R}^3$, состоящая из всех точек C вида $C = x_1A_1 + x_2A_2$, а B^* – проекция точки B на плоскость Π. Для точки минимума $x^* = (x_1^*; x_2^*)$ функции $S(x)$ точка $x_1^* A_1 + x_2^* A_2$ является точкой плоскости Π, для которой квадрат расстояния до B является наименьшим. Следовательно, точка $x_1^* A_1 + x_2^* A_2$ – ближайшая к B точка плоскости Π. Поэтому $x_1^* A_1 + x_2^* A_2 = B^*$ – проекция B на Π.

Из элементарной геометрии известно, что вектор $\overrightarrow{BB^*}$ перпендикулярен плоскости Π. Отсюда следует, что скалярные произведения $\left(A_1, \overrightarrow{BB^*}\right)$ и $\left(A_2, \overrightarrow{BB^*}\right)$ равны нулю. Находим

$$\left(A_1, \overrightarrow{BB^*}\right) = (A_1, A_1)x_1^* + (A_1, A_2)x_2^* - (A_1, B),$$

$$\left(A_2, \overrightarrow{BB^*}\right) = (A_2, A_1)x_1^* + (A_2, A_2)x_2^* - (A_2, B).$$

Следовательно, вектор $x^* = (x_1^*; x_2^*)$, для которого сумма квадратов ошибок $S(x)$ минимальна, удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\begin{cases} (A_1, A_1)x_1 + (A_1, A_2)x_2 = (A_1, B), \\ (A_1, A_2)x_2 + (A_2, A_2)x_2 = (A_2, B). \end{cases} \qquad (10.6)$$

Рассмотрим теперь систему (10.1) в общем случае (m и n – произвольные числа). Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

– матрица коэффициентов системы (10.1). Пусть A_i ($i = 1, 2, ..., m$) – i-й столбец матрицы A и B – столбец свободных членов системы (10.1). Приведенные выше рассуждения позволяют предположить, что наилучшее приближенное решение x^* системы (10.1) является точным решением системы

$$\begin{cases} (A_1, A_1)x_1 & + & (A_1, A_2)x_2 & + & \dots & + & (A_1, A_n)x_n & = & (A_1, B), \\ (A_1, A_2)x_2 & + & (A_2, A_2)x_2 & + & \dots & + & (A_2, A_n)x_n & = & (A_2, B), \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_m, A_1)x_1 & + & (A_m, A_2)x_2 & + & \dots & + & (A_m, A_n)x_n & = & (A_m, B), \end{cases} \qquad (10.7)$$

аналогичной системе (10.6).

Дадим алгебраическое доказательство этого утверждения. Рассмотрим матрицу A^TA. Ее элементами являются скалярные произведения строк матрицы A^T на столбцы матрицы A. Так как строки матрицы A^T – это столбцы матрицы A, то элементами матрицы A^TA являются все возможные скалярные произведения столбцов матрицы A друг на друга. Отсюда следует, что матрица коэффициентов системы (10.7) совпадает с матрицей A^TA. Рассмотрим вектор A^TB.

Его координатами являются скалярные произведения строк матрицы A^T (т.е. столбцов A) на вектор B. Следовательно, вектор свободных членов системы (10.7) совпадает с вектором A^TB. Итак, система (10.7) в матричной записи имеет вид

$$A^T Ax = A^T B. \tag{10.8}$$

Теорема 10.1. *Если столбцы матрицы A линейно независимы, то система* (10.8) *имеет единственное решение* x^*, *и это решение является единственной точкой минимума функции* $S(x) = |Ax - B|^2$ – *суммы квадратов ошибок системы* (10.1).

Доказательство. Предположим сначала, что матрица A^TA вырождена. Тогда для некоторого ненулевого вектора y имеем $A^TAy = 0$. Отсюда $(A^TAy, y) = (Ay, Ay) = 0$[1]. Поэтому $Ay = 0$, что означает линейную зависимость столбцов матрицы A. Это противоречит условию теоремы 10.1, следовательно, матрица A^TA невырождена. Поэтому $x^* = (A^TA)^{-1}A^TB$ – единственное решение системы (10.8).

Пусть $C = x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_nA_n$ – произвольная линейная комбинация столбцов матрицы A. Для вектора-столбца $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ имеем $C = Ax$. Пусть $B^* = Ax^*$. Докажем, что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BB^*}$ и $\overrightarrow{B^*C}$ равно нулю. Действительно, $\overrightarrow{B^*C} =$ $= C - B^* = Ax - Ax^* = Ay$, где $y = x - x^*$. Далее,

$$\left(\overrightarrow{B^*C}, \overrightarrow{BB^*}\right) = \left(Ay, Ax^* - B\right) = \left(Ay, A\left(A^T A\right)^{-1} A^T B - B\right) =$$

$$= \left(y, A^T A\left(A^T A\right)^{-1} A^T B - A^T B\right) = \left(y, A^T B - A^T B\right) = 0.$$

Для квадрата расстояния от B до C получаем неравенство

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BB^*} + \overrightarrow{B^*C}, \overrightarrow{BB^*} + \overrightarrow{B^*C}\right) =$$

$$= \left(\overrightarrow{BB^*}, \overrightarrow{BB^*}\right) + 2\left(\overrightarrow{B^*C}, \overrightarrow{BB^*}\right) + \left(\overrightarrow{B^*C}, \overrightarrow{B^*C}\right) = \left|\overrightarrow{BB^*}\right|^2 + \left|\overrightarrow{B^*C}\right|^2 \geq \left|\overrightarrow{BB^*}\right|^2,$$

---

[1] Здесь мы использовали тождество $(A^Tx, y) = (x, Ay)$.

которое означает, что B^* – ближайшая к B линейная комбинация столбцов матрицы A. Так как $\left|\overrightarrow{B^*C}\right|^2 = 0 \Leftrightarrow B^* = C,$ то последнее полученное неравенство является строгим для $C \neq B^*$. Следовательно, $B^* = Ax^*$ – это единственная ближайшая к B точка вида Ax. Для завершения доказательства теоремы 10.1 осталось напомнить, что $S(x)$ – это квадрат расстояния от точки Ax до точки B.

§ 10.2. Применение метода наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов широко используется при анализе статистических данных для выявления функциональной зависимости между несколькими наблюдаемыми величинами. Однако, поскольку нашей задачей является знакомство с методом, а не изложение теории анализа данных, ограничимся случаем, когда наблюдаются всего две величины x и y, между которыми предполагается наличие функциональной связи $y = P(x)$, где

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_k x^k$$

– многочлен степени k.

Пусть всего проведено n наблюдений величин x и y и (x_i, y_i) – результат i-го наблюдения ($i = 1, 2, \ldots, n$). Естественно принять, что число наблюдений $n \leq k + 1$ – числа неизвестных коэффициентов $p_0, p_1, \ldots, p_k$. Указанные коэффициенты должны являться приближенным решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} p_0 + x_1 p_1 + x_1^2 p_2 + \ldots + x_1^k p_k = y_1, \\ p_0 + x_2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_2^k p_k = y_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_0 + x_n p_1 + x_n^2 p_2 + \ldots + x_n^k p_k = y_n. \end{cases} \tag{10.9}$$

Найдем $p_0, p_1, \ldots, p_k$, применяя метод наименьших квадратов. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^k \end{pmatrix} \tag{10.10}$$

– матрица коэффициентов системы (10.9). Если столбцы матрицы A линейно независимы, то по теореме 10.1 получаем, что вектор-столбец $p = (p_0, p_1, ..., p_k)^T$ коэффициентов «наилучшего» многочлена $P(x)$ является единственным решением системы

$$A^T A p = A^T Y, \tag{10.11}$$

где $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ – вектор-столбец, составленный из последовательных значений величины y.

Докажем, что в случае, когда все наблюдаемые значения величины x различны ($x_i \neq x_j$ при $i \neq j$), столбцы матрицы A линейно независимы.

Предварительно докажем такую лемму.

Лемма. *При любом $k \geq 1$ справедливо равенство*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \dots & x_{k+1}^k \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=i+1}^{k+1} \left(x_j - x_i\right). \tag{10.12}$$

Доказательство. Обозначим указанный определитель через $D(k) = D(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$. При $k = 1$ лемма очевидна:

$$D\left(x_1, x_2\right) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 .$$

Для вычисления определителя

$$D\left(x_1, x_2, x_3\right) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

воспользуемся его свойством: определитель не изменится, если вычтем из второго столбца первый, умноженный на x_1, и из третьего столбца второй, умноженный на x_1. В результате имеем определитель

$$D(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 \end{vmatrix}. \tag{10.13}$$

Разлагая определитель (10.13) по первой строке, получим

$$D(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 \end{vmatrix}. \tag{10.14}$$

Элементы первой строки определителя (10.14) имеют общий множитель $(x_2 - x_1)$; элементы второй строки имеют общий множитель $(x_3 - x_1)$. Вынося общие множители, получим

$$D(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)D(x_2, x_3).$$

Мы уже проверяли, что $D(x_2, x_3) = x_2 - x_3$. Таким образом, в случае $k = 2$

$$D(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2),$$

так что лемма проверена.

Для определителя $D(x_1, x_2, x_3, x_4)$, проделав аналогичные преобразования, получим

$$D(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix}. \tag{10.15}$$

Определитель, расположенный в правой части равенства (10.15), равен $D(x_2, x_3, x_4)$. Поэтому

$$D(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

Итак, лемма доказана и для $k = 3$. Отметим, что при доказательстве леммы для $k = 2$ и $k = 3$ мы сводили вычисление определителя $D(k)$ к определителю вида $D(k-1)$. Аналогичным образом лемма доказывается и для $k \geq 4$.

Продолжим доказательство независимости столбцов матрицы A (см. (10.10)). Вычеркнем в этой матрице все строки с номерами больше $k + 1$, полученную матрицу обозначим A'. По лемме определитель матрицы A' равен произведению всех разностей вида $x_j - x_i$ $(j > i)$. Так как все x_i различны, то $|A'| \neq 0$. Следовательно, столбцы матрицы A' линейно независимы; тем самым линейно независимы и более «длинные» столбцы матрицы A. Поэтому вектор $p = (p_0, p_1, ..., p_k)^T$ коэффициентов «наилучшего» многочлена $P(x)$ действительно является единственным решением (10.11) и может быть найден по формуле

$$p = (A^T A)^{-1} A^T Y. \qquad (10.16)$$

В качестве применения изложенных выше результатов найдем главную квадратичную тенденцию (тренд) изменения некоторой величины y по ее временному ряду $y_1, y_2, ..., y_n$. Будем для определенности считать, что величина y измеряется ежемесячно в течение одного года (таким образом, $n = 12$). Мы хотим найти приближенную зависимость вида

$$y = p_0 + p_1 x + p_2 x^2, \qquad (10.17)$$

где x – время. Пусть единицей измерения времени будет 1 месяц, положим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., $x_{12} = 12$. Тогда условие (10.17) приводит к системе (10.9), в которой $k = 2$, $n = 12$. Соответственно система (10.7) § 10.1 приобретает вид

$$\begin{cases} (A_1,A_1)p_0 + (A_1,A_2)p_1 + (A_1,A_3)p_2 = (A_1,Y), \\ (A_2,A_1)p_0 + (A_2,A_2)p_1 + (A_2,A_3)p_2 = (A_2,Y), \\ (A_3,A_1)p_0 + (A_3,A_2)p_1 + (A_3,A_3)p_2 = (A_3,Y), \end{cases} \qquad (10.18)$$

где

$$A_1 = (1, 1, \ldots, 1)^T,$$

$$A_2 = (x_1, x_2, \ldots, x_{12})^T = (1, 2, \ldots, 12)^T,$$

$$A_3 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{12}^2)^T = (1, 4, \ldots, 144)^T,$$

$$Y = (y_1, y_2, ..., y_{12})^T.$$

Находим коэффициенты системы (10.18):

$$(A_1, A_1) = 1 + 1 + ... + 1 = 12,$$
$$(A_1, A_2) = (A_2, A_1) = 1 + 2 + ... + 12 = 78,$$
$$(A_1, A_3) = (A_2, A_2) = (A_3, A_1) = 1^2 + 2^2 + ... + 12^2 = 650,$$
$$(A_2, A_3) = (A_3, A_2) = 1^3 + 2^3 + ... + 12^3 = 6084,$$
$$(A_3, A_3) = 1^4 + 2^4 + ... + 12^4 = 60710.$$

Таким образом, система (10.18) имеет вид

$$\begin{cases} 12p_0 + 78p_1 + 650p_2 = Y_1, \\ 78p_0 + 650p_1 + 6084p_2 = Y_2, \\ 650p_0 + 6084p_1 + 60710p_2 = Y_3, \end{cases} \tag{10.19}$$

где

$$Y_1 = y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{12},$$
$$Y_2 = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + ... + 12y_{12},$$
$$Y_3 = 1^2y_1 + 2^2y_2 + 3^2y_3 + ... + 12^2y_{12}.$$

Вычислив обратную матрицу[1] для матрицы коэффициентов системы (10.19):

$$\begin{pmatrix} 12 & 78 & 650 \\ 78 & 650 & 6084 \\ 650 & 6084 & 60710 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}06818 & -0{,}3409 & 0{,}02273 \\ -0{,}3409 & 0{,}1336 & -0{,}0097 \\ 0{,}02273 & -0{,}0097 & 0{,}00075 \end{pmatrix},$$

находим искомые коэффициенты p_0^*, p_1^*, p_2^*:

$$p_0^* = 1{,}06818 \cdot Y_1 - 0{,}3409 \cdot Y_2 + 0{,}02273 \cdot Y_3,$$

$$p_1^* = -0{,}3409\ Y_1 + 0{,}1336\ Y_2 - 0{,}0097\ Y_3,$$

$$p_2^* = 0{,}02273\ Y_1 - 0{,}0097\ Y_2 + 0{,}00075\ Y_3.$$

[1] Далее числовые данные приводятся с округлением.

Пусть, например, y_i – курс доллара США на последних торгах ММВБ i-го месяца 1992 г. (i = 1, ..., 12). Тогда

$$Y = (230, 139, 160, 144, 113, 147, 161, 210, 248, 398, 447, 414).$$

Вычисляя по приведенным выше формулам, находим:

$$Y_1 = 2812;\ Y_2 = 21924;\ Y_3 = 207664;$$

$$p_0^* = 249;\ p_1^* = –51{,}91;\ p_2^* = 5{,}955.$$

Итак, мы установили, что квадратичная тенденция изменения курса доллара на торгах ММВБ в 1992 г. имеет вид

$$Y = 5{,}955x^2 – 51{,}91x + 249. \tag{10.20}$$

Рассчитывая по формуле (10.20) «сглаженные» значения курса доллара, получим

$$y_1^* = 5{,}955 – 51{,}91 + 249 = 203;$$

$$y_2^* = 5{,}955 \cdot 4 – 51{,}91 \cdot 2 + 249 = 169 \text{ и т.д.}$$

Запишем эти 12 чисел в виде вектора

$$Y^* = (203; 169; 147; 137; 138; 152; 178; 215; 264; 326; 399; 484).$$

Отметим, что Y^* можно рассматривать как точку трехмерной плоскости П, образованной всеми линейными комбинациями векторов A_1, A_2, A_3, ближайшую к точке Y.

Соответственно Y^* можно найти по формуле

$$Y^* = Ap^*,$$

что (при наличии матричного калькулятора) проще, чем последовательная подстановка двенадцати чисел 1, 2,..., 12 в формулу (10.20). Изобразим векторы Y и в Y^* виде ломаных с вершинами в точках

$(1; y_1)$, $(2; y_2)$,..., $(12; y_{12})$ и $(1;\ y_1^*)$, $(2;\ y_2^*)$,..., $(12;\ y_{12}^*)$ соответственно (рис. 10.1).

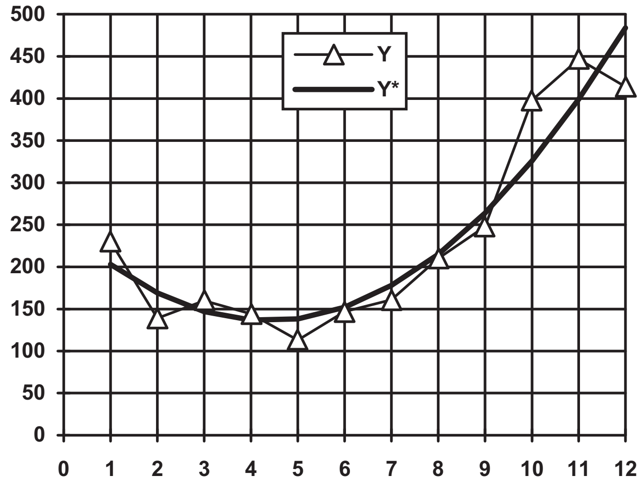

Рис. 10.1

При рассмотрении рис. 10.1 возникает вопрос: будет ли тенденция (10.20) действовать хотя бы в январе 1993 г., можно ли таким образом строить прогнозы на будущее? Подставив $x = 13$ в формулу (10.20), найдем $y_{13}^* = 580$, тогда как на самом деле курс доллара в конце января 1993 г. составил только $y_{13} = 572$. Полученный прогноз оказался относительно удачным, однако следует ясно понимать, что прогнозирование любого экономического показателя только лишь по его прошлым значениям без учета других, связанных с ним индикаторов, крайне ненадежно.

§ 10.3. Случай линейной зависимости между переменными

Рассмотрим теперь подробнее случай, тогда многочлен $P(x)$ имеет степень 1. Таким образом, между наблюдаемыми величинами x и y предполагается линейная зависимость вида

$$y = \alpha + \beta x.$$

Для определения коэффициентов α и β можно воспользоваться системой (10.11), которая с учетом новых обозначений $\alpha = p_0$, $\beta = p_1$ приобретает вид

$$\begin{cases} (A_1, A_1)\alpha + (A_1, A_2)\beta = (A_1, Y), \\ (A_2, A_1)\alpha + (A_2, A_2)\beta = (A_2, Y), \end{cases}$$

где $A_1 = (1; 1; ...; 1)$, $A_2 = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Используя знак суммы $\sum$, перепишем данную систему так:

$$\begin{cases} n\alpha + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\alpha + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \tag{10.21}$$

Решая систему (10.21), находим

$$\beta^* = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{10.22}$$

Пусть $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ – средние значения наблюдаемых величин. Тогда первое уравнение системы (10.21) эквивалентно

$$n\alpha + n\bar{x}\beta = n\bar{y},$$

откуда находим

$$\alpha^* = \bar{y} - \beta^* \bar{x}. \tag{10.23}$$

Итак, метод наименьших квадратов позволяет получить приближенную линейную зависимость

$$y = \alpha^* + \beta^* x,$$

где α^* и β^* определены формулами (10.22), (10.23).

Рассмотрим числовой пример. Предположим, что у нас есть следующие данные о размерах покупок y и их розничной цене x для некоторого товара (табл. 10.1).

Таблица 10.1

i, номер наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i, количество (кг)	25	30	20	25	15	10	20	35	40	30
x_i, цена (тыс. руб.)	14	12	15	14	18	20	16	12	10	13

Находим

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 144, \ \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 2154, \ \left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2 = 20736,$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 250, \ \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 3360.$$

Используя (10.22), получим

$$\beta^* = \frac{10 \cdot 3360 - 144 \cdot 250}{10 \cdot 2154 - 20736} = -2{,}985.$$

Вычислив средние значения $\bar{x} = 14{,}4$ и $\bar{y} = 25$, по формуле (10.23) найдем

$$\alpha^* = 25 - (-2{,}985) \cdot 14{,}4 = 68.$$

Таким образом, уравнение прямой спроса имеет вид

$$y = 68 - 2{,}985x. \qquad (10.24)$$

Для оценки степени соответствия найденного уравнения исходным данным обычно применяется показатель R^2 (эр-квадрат). Этот показатель определяется следующим образом. Пусть, как и раньше, $A_1=(1;\ 1;\ ...,\ 1)^T$, $A_2=(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)^T$. Пусть П – двумерная плоскость в n-мерном пространстве, состоящая из всех линейных комбинаций векторов A_1 и A_2. С геометрической точки зрения метод наименьших квадратов состоит в том, что отыскивается точка

$Y^* \in \Pi$, расположенная ближе всего к заданной точке $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Пусть $\overline{Y} = (\overline{y}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}) = \overline{y} A_1$ – n-мерный вектор, все координаты которого равны $\overline{y}$ – среднему значению наблюдаемой величины y. Так как вектор $\overrightarrow{YY^*}$ перпендикулярен плоскости П,

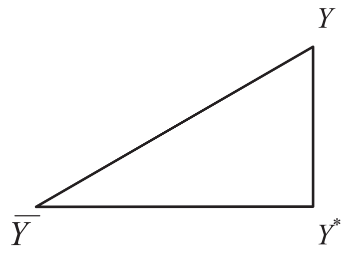

Рис. 10.2

то треугольник $\overline{Y}YY^*$ – прямоугольный (рис. 10.2). Поскольку квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, то

$$\overline{Y}Y^2 = \overline{Y}Y^{*2} + Y^*Y^2, \tag{10.25}$$

где

$$\overline{Y}Y^2 = (y_1 - \overline{y})^2 + (y_2 - \overline{y})^2 + \ldots + (y_n - \overline{y})^2$$

– так называемая *полная* вариация y;

$$\overline{Y}Y^{*2} = (y_1^* - \overline{y})^2 + (y_2^* - \overline{y})^2 + \ldots + (y_n^* - \overline{y})^2$$

– вариация y, *объясненная* зависимостью y от x;

$$Y^*Y^2 = (y_1 - y_1^*)^2 + (y_2 - y_2^*)^2 + \ldots + (y_n - y_n^*)^2$$

– *собственная* вариация y, или просто сумма квадратов ошибок.

Степень зависимости y от x оценивается с помощью показателя R^2:

$$R^2 = \frac{\overline{Y}Y^{*2}}{\overline{Y}Y^2}. \tag{10.26}$$

Другими словами, R^2 – это доля объясненной вариации y в полной вариации y. Из (10.25) следует, что $R^2 \in [0, 1]$. С геометрической точки зрения R^2 – это квадрат косинуса угла $\overline{Y}$ в треугольнике $\overline{Y}YY^*$.

Нетрудно подсчитать, что для найденной выше функции спроса (10.24) показатель R^2 = 0,955, что можно интерпретировать как достаточно удачное приближение наблюдаемых значений спроса линейной функции (10.24).

Завершая рассмотрение приложений метода наименьших квадратов, опишем показатели *альфа* и *бета* акций компании. Предположим, что на некоторой фондовой бирже, начиная с некоторого момента времени, через равные интервалы времени (скажем, ежемесячно) регистрируются характеристики акций, обращающихся на данной бирже.

Пусть p_j^t – стоимость одной акции j-й компании в начале периода с номером t (или, что то же самое, в конце периода t – 1), а d_j^t – сумма дивидендов, выплаченных по одной акции той же компании за период t. Доходность акций данной компании за период t определяется отношением

$$r_j^t = \frac{p_j^{t+1} + d_j^t - p_j^t}{p_j^t}.$$

Портфель X акций задается числом акций каждого вида, входящих в данный портфель. Нас, однако, будет интересовать не число акций компании j в составе портфеля, а их доля x_j в стоимости всего портфеля на начало периода. Очевидно, что сумма всех долей $\sum_j x_j = 1$, а доходность портфеля r_X^t за период t определяется формулой

$$r_X^t = \sum_j x_j r_j^t.$$

Рыночный портфель акций определяется как портфель M, в котором представлены все имеющиеся в наличии обыкновенные акции. Применяя метод наименьших квадратов, найдем приближенную линейную зависимость r_j и r_X от доходности рыночного портфеля:

$$r_j = \alpha_j + \beta_j r_M, \tag{10.27}$$

$$r_X = \alpha_X + \beta_X r_M. \tag{10.28}$$

Коэффициенты α_j и β_j (соответственно α_X и β_X) называются коэффициентами *альфа* и *бета* акций j (соответственно портфеля X).

Акции, для которых $\beta_j > 1$, часто называют *агрессивными* инвестиционными инструментами, колебания их доходности в среднем превышают колебания других акций. Если $\beta_j < 1$, то акции такого типа называют *защитными* инвестиционными инструментами.

Надо отметить, что показатель R^2 для акций обычно существенно меньше 1, что свидетельствует о значительном разбросе точек (r_M^t, r_j^t) относительно прямой (10.27). В то же время для портфелей акций показатель R^2 обычно увеличивается при увеличении числа различных акций в портфеле и может быть близок к 1. Этот эффект называют *диверсификацией риска.*

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ И РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

Далее приводятся доказательства основной теоремы 3.1 алгебры комплексных чисел и теоремы о разложении рациональной функции на простейшие дроби, которая будет использоваться во второй части учебника.

Начнем с теоремы, которая утверждает *алгебраическую замкнутость* поля комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Теорема П.1 (основная теорема алгебры). *Для всякого многочлена с комплексными коэффициентами*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

степени $n > 0$ *существует точка* $z_0 \in \mathbb{C}$, *в которой* $P(z_0) = 0$.

Доказательство. Поскольку $n > 0$, можно подобрать действительное число M так, чтобы вне открытого круга $|z| < M$ модуль многочлена $P(z)$ удовлетворял неравенству

$$|P(z)| > |P(0)|. \tag{П.1}$$

Из курса математического анализа (см., например, часть 2 учебника) известно, что всякая непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве в некоторой точке принимает свое наименьшее значение. Отсюда следует, что в круге $|z| \leq M$ найдется такая точка z_0, что $|P(z_0)| \leq |P(z)|$ для любой точки z из этого круга.

Определим многочлен $Q(u) = b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \ldots + b_1 u + b_0$ равенством

$$Q(u) = P(u + z_0).$$

Коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_n$ находятся в результате раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $a_n (u + z_0)^n + a_{n-1}(u + z_0)^{n-1} + \ldots + a_1 (u + z_0) + a_0$, поэтому $b_n = a_n \neq 0$, т.е. $Q(u)$ – многочлен той же степени, что и $P(z)$. Нетрудно видеть, что

$$P(z_0) = Q(0) = b_0.$$

Предположим, что $b_0 \neq 0$. На окружности $|z| = M$ выполняется неравенство (П.1), поэтому $|z_0| < M$. Следовательно, для любого комплексного u, такого, что $|u| < M - |z_0|$, имеем $|P(z_0 + u)| = |Q(u)| > |b_0|$. Однако данное неравенство нарушается, по крайней мере, для $u = \sqrt[k]{-\varepsilon b_0 / b_k}$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое действительное число, а k – наименьшее положительное целое, для которого $b_k \neq 0$. Действительно, пренебрегая членами $Q(u)$ степени больше k, находим

$$|Q(u)| \approx \left| b_0 + b_k \left(\sqrt[k]{-\varepsilon b_0 / b_k} \right)^k \right| = |b_0 - \varepsilon b_0| = (1 - \varepsilon)|b_0| < |b_0|.$$

Полученное противоречие означает, что $P(z_0) = b_0 = 0$. Теорема доказана.

Следующий сюжет приложения связан с разложением рациональных дробей на простейшие.

Определение. ***Рациональной функцией*** *называют отношение двух многочленов*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}. \qquad (\text{П.2})$$

Для простоты будем считать в дальнейшем, что $b_0 = 1$, т.е. $Q(x)$ – многочлен со старшим коэффициентом 1. Разделив $P(x)$ на $Q(x)$ с остатком, имеем

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x), \qquad (\text{П.3})$$

причем степень $R(x)$ меньше степени $Q(x)$. Поэтому рациональную функцию (П.2) можно записать в виде

$$f(x)=D(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{П.4}$$

где $D(x)$ – многочлен, а дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – *правильная*, т.е. степень $R(x)$ меньше степени $Q(x)$.

Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать в дальнейшем, что рациональная функция $f(x)$ (П.2) представлена в виде правильной дроби и $b_0=1$.

В главе 3 было показано, что знаменатель $Q(x)$ разлагается на неприводимые линейные и квадратичные множители

$$Q(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_s)^{k_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\dots\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{l_t}. \tag{П.5}$$

Определение. ***Простейшей дробью первого типа***, *соответствующей линейному множителю $x-\alpha$, назовем дробь вида*

$$\frac{A}{(x-\alpha)^r},\ A\in\mathbb{R}. \tag{П.6}$$

Простейшей дробью второго типа, *соответствующей неприводимому квадратному множителю x^2+px+q, назовем дробь вида*

$$\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^s},\quad B,C\in\mathbb{R}. \tag{П.7}$$

Теорема П.2 (о разложении на простейшие дроби). *Любая правильная дробь* (П.2) *разлагается в сумму простейших дробей вида* (П.6) *или* (П.7), *причем множителю $(x-\alpha)^k$ в представлении знаменателя $Q(x)$* (П.5) *соответствует сумма слагаемых вида* (П.6)

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}, \tag{П.8}$$

а множителю $\left(x^2+px+q\right)^l$ *сумма*

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{B_lx+C_l}{\left(x^2+px+q\right)^l}. \tag{П.9}$$

Доказательство. В процессе доказательства будем «отделять» от рациональной функции (П.2) простейшие дроби вида (П.6) или (П.7), причем знаменатель разности будет разлагаться в произведение неприводимых множителей вида $x-\alpha$ или x^2+px+q в степени, меньшей, чем $Q(x)$.

Рассмотрим два случая.

1. $Q(x)=(x-\alpha)^k Q_1(x)$, причем $Q_1(\alpha)\neq 0$.

Искомое разложение запишем так:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^k}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},\ A\in\mathbb{R}. \tag{П.10}$$

Положим $A=\dfrac{P_1(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$. Тогда из (П.10) имеем

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A}{(x-\alpha)^k}=\frac{P(x)-AQ_1(x)}{Q(x)}. \tag{П.11}$$

Числитель дроби справа имеет корень $x=\alpha$, поскольку $P(\alpha)-AQ_1(\alpha)=0$ по определению A, так что

$$P(x)-AQ_1(x)=(x-\alpha)\overline{P}(x)$$

и после сокращения на $x-\alpha$ мы видим, что знаменатель $Q_1(x)$ в (П.10) делится на степень $x-\alpha$, строго меньшую чем $Q(x)$.

Рассуждая по индукции, можно добиться, чтобы от рациональной функции (П.2) отделить сумму простейших дробей вида (П.8) и знаменатель разности не делится на $x-\alpha$.

2. Пусть $Q(x)=\left(x^2+px+q\right)^l Q_1(x)$ и $Q_1(x)$ не делится на x^2+px+q нацело. Обозначим через α и $\overline{\alpha}$ сопряженные комплексные корни уравнения

$$x^2+px+q=0.$$

Поскольку квадратный трехчлен неприводим, то $\alpha\neq\overline{\alpha}$. По определению $Q_1(\alpha)\neq 0$ и $Q_1(\overline{\alpha})\neq 0$.

Найдем действительные числа B и C, такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^l}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \qquad (\text{П.12})$$

причем знаменатель $Q_1(x)$ имеет множитель x^2+px+q в степени, меньшей l. Будем искать B и C из системы уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}=B\alpha+C,\\ \dfrac{P(\overline{\alpha})}{Q_1(\overline{\alpha})}=B\overline{\alpha}+C.\end{cases} \qquad (\text{П.13})$$

Вообще говоря, B и C – комплексные числа. Чтобы проверить, что они действительные, выразим B из системы (П.13):

$$B=\frac{\dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}-\dfrac{P(\overline{\alpha})}{Q_1(\overline{\alpha})}}{\alpha-\overline{\alpha}}. \qquad (\text{П.14})$$

Поскольку $\overline{B}=\dfrac{\dfrac{P(\overline{\alpha})}{Q_1(\overline{\alpha})}-\dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}}{\overline{\alpha}-\alpha}=B,$ то B – действительное число. Применим операцию сопряжения ко второму уравнению системы (П.13):

$$\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = B\alpha + \overline{C}.$$

Сравнивая с первым уравнением, получим $C = \overline{C}$, т.е. и $C \in \mathbb{R}$.

Из (П.13) следует, что многочлен с действительными коэффициентами $P(x) - (Bx + C)Q_1(x)$ имеет корни α и $\overline{\alpha}$, следовательно, делится нацело на $x^2 + px + q$, и дробь $\frac{P(x) - (Bx + C)Q_1(x)}{Q(x)}$ сокращается на этот множитель. Таким образом, знаменатель дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ (П.12) делится на множитель $x^2 + px + q$ в степени, меньшей, чем $Q(x)$. По индукции мы можем выделить из рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ сумму простейших дробей вида (П.9).

Проделав соответствующие действия над всеми множителями знаменателя (П.5) вида $x - \alpha$ или $x^2 + px + q$, получим искомое представление рациональной функции (П.2) в виде суммы простейших дробей, что завершает доказательство теоремы.

Замечание. Разложение в сумму простейших дробей единственно с точностью до перестановки слагаемых. Проверку оставляем читателю.

В заключение рассмотрим пример.

Пример П.1. Разложить на простейшие дроби функцию

$$f(x) = \frac{4x^3 - 6x^2 + 8x - 11}{(x-1)^2(x^2+4)}.$$

Решение. Для разложения на простейшие дроби используют *метод неопределенных коэффициентов*. Запишем разложение на простейшие дроби в соответствии с утверждением теоремы:

$$\frac{4x^3 - 6x^2 + 8x - 11}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}. \tag{П.15}$$

Нам предстоит найти неопределенные коэффициенты $A, B, C, D.$ С этой целью приведем к общему знаменателю правую часть (П.15) и приравняем числители дробей. В итоге получим

$$4x^3-6x^2+8x-11=A(x-1)\left(x^2+4\right)+B\left(x^2+4\right)+(Cx+D)(x-1)^2. \quad (\text{П}.16)$$

Для нахождения B подставим в равенство (П.16) $x=1.$ Тогда все слагаемые справа, кроме среднего, обратятся в нуль, так что

$$-5=5B,$$

откуда $B=-1.$ Для нахождения A продифференцируем обе части (П.16) и подставим $x=1$:

$$12x^2-12x+8=$$
$$=A\left(x^2+4\right)+2Ax(x-1)+2Bx+C(x-1)^2+2(Cx+D)(x-1).$$
$$8=5A+2B.$$

Поэтому $8=5A-2,$ так что $A=2.$

Осталось найти C и $D.$ Для отыскания C приравняем коэффициенты при x^3 слева и справа в (П.16):

$$4=A+C,$$

откуда $C=2$. Подставим $x=0$ в (П.16) и получим

$$-11=-4A+4B+D,$$

так что $D=1.$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\frac{4x^3-6x^2+8x-11}{(x-1)^2\left(x^2+4\right)}=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+4}.$$

Большое число примеров разобрано дополнительно во второй части учебника в гл. 4 «Определенный интеграл и его приложения».

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах/ И.Л. Акулич. – СПб.: Лань, 2009.
2. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры/ П.С. Александров. – СПб.: Лань, 2009.
3. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику/ С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1984.
4. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры/ Д.В. Беклемишев. – М.: Физматлит, 2007.
5. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов/ И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – СПб.: Лань, 2009.
6. *Варден Б.Л. ван дер.* Алгебра/ Б.Л. ван дер Варден. – СПб.: Лань, 2004.
7. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей/ Д. Гейл. – М.: Иностр. лит., 1969.
8. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре/ И.М. Гельфанд. – М.: Добросвет, МЦНМО, 2007.
9. *Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование (теория, методы и приложения)/ Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. – М.: Наука, 1969 (готовится переиздание издательством URSS в 2010 г.).
10. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщения и приложения/ Дж. Данциг. – М: Прогресс, 1966.
11. *Зуховицкий С.И.* Линейное и выпуклое программирование/ С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука, 1967.
12. *Ефимов Н.В.* Квадратичные формы и матрицы/ Н.В. Ефимов. – М.: Наука, 1975.
13. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии/ Н.В. Ефимов. – М.: Наука, 1975.
14. *Карпелевич Ф.М.* Математическое программирование/ Ф.М. Карпелевич, Л.Е. Садовский. – М.: Наука, 1986.
15. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры/ А.Г. Курош. – СПб.: Лань, 2008.
16. *Леонтьев В.В.* Избранные произведения. В 3 томах/ В.В. Леонтьев. – М.: Экономика, 2006.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Д

З

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Солодовников Александр Самуилович
Бабайцев Владимир Алексеевич
Браилов Андрей Владимирович
Шандра Игорь Георгиевич

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

Часть 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Заведующая редакцией *Л.А. Табакова*
Ведущий редактор *Л.Д. Григорьева*
Младший редактор *О.О. Салтыкова*
Художественный редактор *Г.Г. Семенова*
Технический редактор *Т.С. Маринина*
Компьютерная верстка *В.А. Бабайцева*

ИБ № 5385

Подписано в печать 26.08.2012. Формат 60x90 1/16
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная
Усл. п.л. 24,0. Уч.-изд. л. 23,4
Тираж 1000 экз. Заказ

Издательство «Финансы и статистика»
101000, Москва, ул. Покровка, 7

Телефон (495) 625-35-02. Факс (495) 625-09-57
E-mail: mail@finstat.ru http://www.finstat.ru